

Öppen matematik

Om att öppna upp matematiken i undervisningen

FÖRFATTARE: STEFAN LINDSTRÖM

ARTIKEL NUMMER 15/2014

Abstract

Jag vill försöka visa på en gemensam nämnare för all god matematikundervisning. Med utgångspunkt i min egen utveckling som matematiklärare vill jag visa på skillnader mellan mindre god undervisning och god undervisning. Jag tycker att det är viktigt att lyfta fram matematikens väsen för eleverna. Vi mattelärare får ofta kritik för att vi har för statisk undervisning, så jag vill visa på hur en dynamisk undervisning kan se ut. En undervisning som öppnar upp matematiken för eleverna, jag kallar det Öppen matematik. Det tydligaste resultatet jag ser av mitt arbete med Öppen matematik är att jag i dag i min undervisning kommer in på mer avancerad matematik än tidigare. Jag tror att det beror på en djupare begreppsförståelse hos eleverna, vilket gör att de driver undervisningen åt ett mer avancerat håll med sina frågor.

Jag undervisar elever i årskurs 7-9, men det förhållningssätt jag beskriver kan lätt anpassas till både yngre och äldre elever. Artikeln vänder sig till matematiklärare.

Stefan Lindström är matematiklärare i årskurs 7-9 på Eklidens skola i Nacka.

E-post: stefan.lindstrom@nacka.se

Denna artikel har den 16 december 2014 accepterats för publicering i Skolportens numrerade artikelserie för utvecklingsarbete i skolan av Nacka kommuns läsgrupp med Björn Söderqvist fil. dr. samt rektor, Nacka kommun, som gruppens ordförande.

Fri kopieringsrätt i ickekommersiellt syfte för kompetensutveckling eller undervisning i skolan och förskolan under förutsättning att författarens namn och artikelns titel anges, samt källa: Skolportens artikelserie. I övrigt gäller copyright för författaren och Skolporten AB gemensamt.

Denna artikel är publicerad i Skolportens nättidskrift Undervisning & Lärande:
www.skolporten.se/forskning/utveckling/

Aktuell metodbok med författaranvisningar:
www.skolporten.se/metodbok

Vill du också skriva en utvecklingsartikel? Mejla till redaktionen@skolporten.se

Innehållsförteckning

Abstract.....	2
1. Inledning	5
2. Syfte	6
3. Metod	6
4. Huvuddel	7
4.1 Min grundsyn	7
4.2 Vad är öppen matematik?	8
4.3 Läxor.....	10
4.4 Ett lektionsexempel	11
4.5 Rika matematiska problem	12
4.6 Instruktör eller lärare?	13
4.7 Variationsteori	15
5. Resultat och diskussion	18
6. Bilagor.....	20
7. Referenser.....	23

1. Inledning

För drygt tio år sedan gick det upp för mig att min matematikundervisning på intet sätt var beroende av min närvaro. Vem som helst med lite pondus hade kunnat öppna åt eleverna och hålla ordning i klassrummet, och eleverna hade lärt sig ungefär samma saker som när jag fanns där. Det var en smärtsam insikt. Eftersom jag fick bra respons från både elever, föräldrar och skolläda trodde jag att jag hade bra undervisning. Det visade sig alltså att den goda responsen hade andra orsaker, förmodligen att jag är bra på att skapa relationer till eleverna. De känner sig sedda och därmed nöjda med mig som lärare. Det var första gången jag fick möjlighet att lära mig att inte misstolka nöjda elever och ta det som ett kvitto på att undervisningen är bra. Jag försöker fortfarande lära mig det.

Jag kom över ett utkast till en rapport som fick namnet *Lusten att lära* (Skolverket, 2003). I den beskrivs hur den gängse undervisningen dödar elevernas lust att lära. Underlaget till rapporten är en kvalitetsgranskning genomförd hos ett drygt femtiotal huvudmän. De som var ute och observerade lektioner såg på högstadiet i princip en enda dominerande undervisningsmodell; kort genomgång, enskilt arbete i boken, diagnos/prov. Elevenkäter som genomfördes visade att detta sätt att jobba tog lusten ur eleverna. Men rapporten visar inte bara på brister, det finns i slutet en lista på faktorer som bidrar till lusten att lära. Utifrån den kan man alltså lägga upp en undervisning som känns lustfylld.

Jag bestämde mig för att planera undervisningen för min nya årskurs 7 på ett helt nytt sätt – övriga klasser fortsatte jag som vanligt i. För att inte ge mig själv någon möjlighet att komma oförberedd till lektionen, och låta eleverna jobba vidare i boken, bestämde jag mig för att jobba helt utan lärobok. Vid denna tidpunkt tyckte jag dessutom att matematikböcker var alltigenom dåliga, och utan värde i undervisningen. En hållning jag fått revidera senare. Kortfattat beskrivet så planerade jag terminens lektioner utan tanke på innehåll i första skedet. Fokus var på att åstadkomma en variation i undervisningen på flera plan. Först när den planeringen var klar började jag lägga in matematiskt innehåll i planeringen, med stort fokus på problemlösning i par eller grupp. Med utgångspunkt i problemlösningen jobbade vi med metoder att använda i lösningsstrategin.

Själva problemlösningen jobbade vi strukturerat med enligt en **femstegsmodell**:

1. Förstå problemet
2. Leta efter en lösningsstrategi
3. Lös problemet
4. Är lösningen rimlig?
5. Redovisa lösningen

Till en början var eleverna väldigt kritiska till undervisningen, de tyckte inte att de fick något sammanhang när de inte följde en bok. Vi diskuterade fram ett sätt för dem att vara strukturerade i sina räknehäften, och jag införde loggbok. Innan första terminen var slut var det ingen elev som ville gå över till mer traditionell undervisning utifrån en bok. Efter ett par år märkte jag att eleverna blev bättre på problemlösning och hade ett mer utvecklat matematiskt tänkande än mina tidigare elever. Men däremot var de sämre på rena metoduppgifter. Jag började föra in mer metodbefästade inslag i undervisningen, och då återupptäckte jag matematikboken. Det finns faktiskt både struktur och bra uppgifter i den. Snart växte det hos mig fram en insikt. Det avgörande för om undervisningen blir bra och lustfylld eller inte beror på vilket grundläggande syfte jag ser med undervisningen – inte på formerna för den. Tack vare all problemlösning, där vi alltid redovisade flera lösningar på problemen och diskuterade dem, övade jag upp min förmåga att lyfta fram matematiska principer och kvaliteter i lösningarna. Jag insåg att man faktiskt kan jobba så även med uppgifterna i matematikboken. Idag har jag inte samma fokus på problemlösningen, även om den är ett givet inslag i undervisningen. Istället ligger fokus på matematiska principer och den matematiska argumentationen.

2. Syfte

Avsikten med att skriva denna artikel är att genom att använda mig själv som exempel försöka inspirera andra till att förändra sitt sätt att undervisa i matematik. Det finns givetvis många olika och bra sätt att undervisa på, men jag vill försöka visa på en gemensam nämnare. Jag menar att all bra matematikundervisning bottnar i grundsynen att syftet med undervisningen är att visa matematikens väsen. Med matematiken kan man göra under, och matematikundervisning är att under visa.

3. Metod

Jag har ett sociokulturellt perspektiv på lärande. Vygotskij (i Bråten, 1998) är alltså den teoretiker jag lutar mig mot i det fallet. Människor lär sig hela tiden i sociala sammanhang, och det innebär att elever hela tiden lär sig saker i skolan. Som lärare måste jag alltså se till att eleverna lär sig rätt saker. Det är utifrån denna teoretiska grund jag sökt utveckla min matematikundervisning. Ytterligare stöd för ett sociokulturellt perspektiv

på lärande får man från kognitionsforskning. I (Gärdenfors, 2010) framhålls inlevelseförmåga som förutsättning för lärande, och i det sammanhanget beskrivs undervisning som en grundläggande form för samarbete mellan människor.

Då jag valt väg i mitt förändringsarbete har jag sökt inspiration och stöd i rapporter och artiklar. Den viktigaste ögonöppnaren för mig har varit rapporten Lusten att lära (Skolverket, 2003). Jag tog avstamp i den när det gäller formerna för undervisningen.

När det gäller kunskapssynen så sökte jag efter exempel på undervisning som lett till goda resultat. Jag hittade då artiklar som handlade om japansk matematikundervisning. Det är över tio år sedan, så jag har dessvärre inte någon av artiklarna kvar. Men innehållet i dem är likartat med det som beskrivs av (Helmertz, 2008) och som handlar om problemlösning.

Utvärderingen av förändringsarbetet gjorde jag genom att titta på elevernas resultat och genom att eleverna fick komma med synpunkter och besvara frågor om undervisningen. Jag har inte kvar några av de tidigare enkäterna, men tar med en senare enkät som jag genomförde med en klass som jag haft i knappt en termin (Bilaga 1).

4. Huvuddel

4.1 Min grundsyn

Oavsett vad man lutar sig mot för teorier om lärande så är det viktigt hur man ser på sin roll som lärare, och vad man har för syn på sina elever. Jag kallar det grundsyn eftersom det kommer att genomsyra lärarens agerande i klassrummet.

Min grundsyn bottnar i konstaterandet att jag tror att eleverna är beroende av mig som lärare för att få en gynnsam kunskapsutveckling. Om det inte vore så skulle det inte finnas någon mening med att jag gick till jobbet. Det innebär att jag ser elevernas misslyckanden som mina egna misslyckanden. Jag tror nämligen att alla elever, med väldigt få undantag, kan nå åtminstone betyget C. Det krävs endast två saker för att det ska ske:

1. Jag lyckas motivera varje enskild elev att anstränga sig för att nå högt ställda mål.
2. Jag lyckas hitta sätt att få varje enskild elev att förstå.

Även om det ibland finns ramfaktorer som jag inte kan påverka, och som gör mitt arbete svårare, så är jag övertygad om att jag kan nå minst C med varje elev. Det gäller bara att jag lyckas motivera eleven och att jag är lyhörd för hur eleven tänker fel. Förstår jag elevens feltanke kan jag alltid hitta sätt att leda eleven rätt. Eller i variationsteoretiska termer (se Marton i Tidskrift för lärarutbildning och forskning, 2007); om jag kan identifiera en kritisk

aspekt så kan jag utforma ett variationsmönster som synliggör den kritiska aspekten.

När det gäller motivationen så är den något väldigt grundläggande enligt kognitionsforskningen (Gärdenfors, 2010). Det finns rent biologiska krav på att individen är motiverad för att lära sig något. Gärdenfors skriver:

”Utan känslor och motivation skulle det inte kunna finnas något lärande”
(Gärdenfors, 2010. s. 71)

4.2 Vad är öppen matematik?

För att visa vad jag menar med öppen matematik(-undervisning) börjar jag med att ge ett exempel på stängd matematik för att kontrastera mot det. Enligt Lusten att lära (Skolverket, 2003), som jag refererat till tidigare är det stor sannolikhet att man får vara med om följande scenario om man besöker en slumpvis mattelektion på högstadiet eller gymnasiet:

Läraren talar om vad dagens lektion handlar om och har en genomgång där någon beräkningsmodell beskrivs och förklaras. Elevenna uppmanas att slå upp någon sida i boken och jobba med samma moment.

Varför kallar jag detta för stängd matematik? Av den enkla anledningen att det inte lämnas någonting öppet för eleverna. De får en modell att följa och får positiv respons om de lyckas imitera läraren bra. Visserligen kommer ofta efter det nakna övandet ett avsnitt med ”problemlösning”, men det är bara en skenbar öppning av undervisningen. ”Problemen” är anpassade så att eleverna ska få öva på det moment de just fått lära sig. Innan jag går vidare till att beskriva alternativet vill jag säga att den ovan beskrivna typen av lektion självklart har sin plats ibland den också, men när det oftast ser ut så är det, som jag ser det, förödande. Dags att beskriva samma lektion med en alternativ ingång:

Läraren ger inte någon inledande genomgång. Elevenna får veta vilka sidor de ska arbeta med i boken. Men de får kompletterande uppdrag. Exempel på kompletterande uppdrag:

Välj uppgifter som känns utmanande att göra eller intressanta att redovisa.

Välj ut en uppgift du vill redovisa och tänk igenom vilka moment som krävs då man löser uppgiften. Vilka matematikkunskaper behövs?

Välj en uppgift som du tror att du kan lösa på flera olika sätt och gör dig beredd att redovisa alla sätten. Vilket av sätten tycker du har högst kvalitet? Varför?

Vad gör detta till ett upplägg som förtjänar epitetet öppen matematik? Jo, här finns inte

någon given modell att följa, vilket leder till att elevernas egna sätt att tänka kommer fram. (Det finns förstås förklaringar och exempel i boken. En del elever använder dem, medan andra inte gör det. Den som behöver stöd får det genom exemplen, medan de som vill tänka själva kan göra det.) De kompletterande uppgifterna stimulerar dessutom eleverna till att försöka förstå vilket matematiskt innehåll uppgifterna har. Att eleverna förväntas vara beredda att redovisa sina lösningar ger lite extra nerv till uppgiften. En del elever blir väldigt taggade av att veta att de ska redovisa, men det finns även elever som hämmas av det. Därför är det viktigt att läraren är uppmärksam på hur eleverna reagerar så att varje elev kan få rätt stöttning. Jag tvingar aldrig någon att redovisa, men jag försöker att locka så många som möjligt fram till tavlan. Ett sätt att hjälpa elever på traven är att bekräfta dem redan medan de löser någon uppgift: *Den löste du snyggt! Kan du inte redovisa den?* Ytterligare en komponent som skapar trygghet kring redovisandet är att man alltid får en applåd efter redovisningen.

När eleverna får en uppsättning uppgifter att jobba med, exempelvis i en mattebok, så är det viktigt att få dem att välja uppgifter aktivt. Ett oreflekterat lösande av uppgifter i den ordning de blivit tryckta på papper är ofta slöseri med tid. Jag försöker alltid få eleverna att välja uppgifter som de tror hjälper dem att lära sig något nytt. Medan de jobbar med uppgifterna går jag runt och kontrollerar vad de jobbar med. Om jag märker att någon verkar jobba i den ordning uppgifterna kommer i boken lägger jag mig i: *Kan du det där? Klarar du det utan ansträngning?* Svarar de ja på frågorna måste de välja andra uppgifter. Detta gäller för de lektioner då tanken är att eleverna ska lära sig något. Ibland ger jag instruktionen att de inte får göra två uppgifter i rad på samma sida i boken. I de flesta böcker innebär det att det blir lite olika typer av uppgifter, vilket minskar risken för oreflekterat räknande. När de ska befästa kunskaper blir naturligtvis arbetet mer mekaniskt till slut. Men jag lägger så mycket befastande som möjligt på läxorna (läxor är ett hett diskussionsämne som får en egen rubrik nedan) för att kunna använda lektionstiden till lärande i så hög grad som möjligt.

Vad kan man då säga om de två olika lektionsscenarierna ovan utifrån ett sociokulturellt perspektiv på lärande? Enligt det perspektivet så lär sig eleverna alltid något under lektionerna. I det första upplägget, med genomgång och enskild övning, sker inte särskilt mycket kommunikation. Det blir då svårt att veta vad eleverna faktiskt lär sig. Några befäster förmodligen den metod de just fått lära sig. Men lär de sig varför metoden fungerar? Eller när den är tillämplig? Kanske, men vi vet inte. Ser de något samband med andra moment de jobbat med?

Det andra upplägget då, varför är det bättre? Först och främst kan vi konstatera att ingen talar om för eleverna hur de ska göra. Det ökar chanserna att de tänker på vad de gör och varför. Ingen har gett dem en lösningsmodell, så de kommer att köra fast emellanåt. Då diskuterar de antingen med en kamrat eller med läraren och vad eleven tänker blir alltså möjligt för läraren att ta del av. Att uppgifter redovisas på tavlan och diskuteras ger också

läraren information om hur eleverna tänker. Det blir alltså möjligt för läraren att på ett helt annat sätt styra vad eleverna lär sig under lektionerna.

En annan aspekt av det sociokulturella perspektivet på lärande är att lärande tar sin avstamp i en social aktivitet. Jag tänker mig enskilt lärande med utgångspunkt i en lärobok som en indirekt social aktivitet. Eleven får sin impuls till lärande från läroboksförfattaren, men kan inte interagera med författaren. Däremot är interaktionen med klasskamrater och lärare en direkt social aktivitet. Ur ett sociokulturellt perspektiv på lärande ger alltså interaktion med människor bättre förutsättningar för lärande än att jobba själv med en bok.

Ytterligare argument för att en undervisning där eleverna ofta får möjlighet att formulera sina tankar för omgivningen och få respons är effektivare än en undervisning där det är tyst i klassrummet ges av det som Vygotskij (i Bråten 1998) kallar *den proximala utvecklingszonen*. Man kan stimulera elevens utveckling/lärande genom att föra in henne i den proximala utvecklingszonen. Det innebär att jag som lärare ska ge eleven uppgifter som är av en svårighetsgrad som eleven nästan klarar själv, men behöver lite hjälp för att ro det i land. Väldigt svårt för mig att veta vilka uppgifter respektive elev ska ha i ett tyst klassrum. (Med tyst menar jag att man inte verbalt formulerar sina tankar, men självklart måste det vara arbetsro i klassrummet.)

4.3 Läxor

Det finns goda argument mot användandet av läxor, vilka är så kända att jag inte redogör för alla här. Men jag tror att man ska undvika att ge läxor som syftar till nytt lärande. Man ska heller inte ge läxor av den typen att undervisningen sedan bygger på att varje elev gjort sin läxa om det går att undvika. Däremot tycker jag att det är rimligt att ge läxor som syftar till att eleven mängdtränar för att befästa kunskaper, eller som syftar till att repetera gamla moment. Jag räknar inte med att alla elever har förutsättningar att lyckas göra läxorna fullt ut. Någon elev har inte den mognadsgraden som krävs för att komma ihåg att göra läxan, en annan har någon funktionsnedsättning och så vidare. Men de flesta elever gör de flesta av läxorna utan problem, varför skulle de inte få den möjligheten då? För att hjälpa elever som har svårt att komma till skott med läxorna kan man på skolan erbjuda läxläsning i anslutning till skoldagens slut.

Hur ger jag då läxor?

Jag förklarar med jämna mellanrum för eleverna vad som är syftet med läxorna. De ska inte göra läxorna för att göra mig glad, det är bortkastad tid. De ska göra läxorna för sin egen skull. Därför kan de när de vill komma med önskemål om att få byta ut den läxa jag ger mot en de själva tycker är mer relevant. Jag protokollför att de gör läxorna i min pärm. Men jag talar om för dem att det enbart är för att de själva ska kunna titta i min pärm för att veta

om de skött läxorna. Jag beskriver läxrutinerna som en service jag tillhandahåller för att förstärka deras lärande.

I årskurs 7 använder jag alltid läxorna som finns i matematikboken. De har en bra balans av uppgifter som är till för att befästa aktuella kunskaper och repetition av gammalt. Eftersom undervisningen inte utgår från boken dyker det ibland upp uppgifter där vi inte jobbat med de metoder som krävs. Det är bra tycker jag, för då blir eleven tvungen att fundera över sitt eget lärande. Jag försöker vara tydlig till eleverna med att de alltid ska berätta för mig om det dykt upp en uppgift de inte klarat av. För att veta om de klarat uppgifterna får de använda facit. Under höstterminen kontrollerar jag varje vecka att de gjort läxan och skriver in det i min pärm. Successivt kontrollerar jag mer sällan, men retroaktivt. Det brukar alltid finnas enstaka elever som vill bli kontrollerade varje vecka.

I årskurs 8 är det olika hur jag gör beroende på grupp, men ofta är läxorna i boken grunden. Fler elever är dock mogna att byta ut läxorna, och de behöver inte fråga mig om de får byta. I årskurs 9 lämnar jag över ansvaret att välja läxor helt till eleverna. Jag ger tips på var de kan hitta bra läxuppgifter, och de elever som känner sig osäkra kan be mig välja läxor åt dem. Principen då de väljer uppgifter ska vara densamma; repetition och befästande.

4.4 Ett lektionsexempel

Jag återger här en lektion jag hade i början av årskurs 8 med en klass, helt enkelt den första lektionen för läsåret. Syftet med lektionen var att tydliggöra att det finns olika huvudräkningsstrategier och att öva på att redovisa sina tankar skriftligt.

På tavlan skrev jag en enda räkneoperation: $0,5 \times 8$

Instruktionen till eleverna var att de skulle räkna ut detta på så många olika sätt som möjligt och redovisa det med pennan så att någon annan kunde beskriva tankegången bara genom att läsa anteckningarna. Jag kunde inte på förhand veta hur responsen skulle bli på uppgiften, så jag hade fler uppgifter redo att fortsätta med. Men det visade sig att denna enda räkneoperation fyllde hela lektionen. Eleverna arbetade engagerat en god stund innan jag kände att några började få slut på uppslag. En del elever sneglade på andras lösningar och utvecklade tanken vidare. (När jag genomfört samma lektion med andra klasser har jag lagt in ett moment där alla lämnar sina anteckningar på bordet och alla går runt och tittar på varandras anteckningar). Sedan fick en elev i taget redovisa sin uträkning och andra förklara tankegången utifrån uträkningen. Till slut lyfte jag fram den matematiska tankegången och gjorde i ett par av fallen justeringar av anteckningarna för att tydliggöra. Bilaga 2 är en bild av hur tavlan såg ut efter lektionen.

Den räkneoperation lektionen byggde på finns i någon form i stor mängd i varenda mattebok. För tolv år sedan hade jag låtit eleverna arbeta igenom denna mängd av liknande uppgifter.

Men de hade inte lärt sig lika mycket som de lärde sig under den beskrivna lektionen, eftersom alla eleverna förmodligen redan kunde utföra sådana beräkningar innan lektionen. Och här kommer vi in på något viktigt: matematik handlar om mycket mer än beräkningar. Att dissekera en beräkning på detta sätt anser jag är mer matematik än själva beräkningen.

Exemplet visar att det går att få elever engagerade i vilken uppgift som helst. Säg till en elev i årskurs 8 att den ska räkna ut vad $0,5 \times 8$ blir så gör eleven det i princip utan att tänka. Engagemanget är i det närmaste noll, och vi har inte tillfört något nytt till elevens tänkande. Men här har en hel klass jobbat engagerat en hel lektion med den uppgiften. Varför blev det plötsligt en intressant uppgift? Det beror på att jag som lärare tillförde något till uppgiften som jag trodde skulle passa den här klassen, något som väckte engagemanget hos eleverna. Det är inte varje gång man träffar så här klockrent på engagemangsknappen, men med en tumregel i bagaget lyckas man oftast tillräckligt bra:

Tillför en metauppgift till uppgiften som syftar till att lyfta fram de matematiska tankar som leder fram till lösningen.

Man lyckas som sagt inte lika bra varje gång, men tillräckligt ofta för att eleverna ska få en känsla av att mattelektionerna är stimulerande. Det gör att de har fördragsamhet med de lektioner som är lite mer rutinbetonade, exempelvis när man befäster nyvunna kunskaper. Det är inte säkert att jag hade fått samma respons med ovanstående lektion i en annan klass, även om jag genomfört den med gott resultat i flera klasser. Även de gånger man misslyckas med att väcka engagemanget genom hur man presenterar uppgiften kan man rätta situationen genom att vara lite uppmärksam när man går runt bland eleverna medan de jobbar. Ofta ser man något som föder en idé om hur man kan ge nya instruktioner som ger en ny infallsvinkel för eleverna.

4.5 Rika matematiska problem

Rika matematiska problem är sådana att de kan lösas på flera olika sätt, och består ofta av deluppgifter med ökande svårighetsgrad. Det gör dem väl lämpade som verktyg att öppna upp matematiken. Jag stötte först på dem då jag läste en avhandling av Eva Taflin (Taflin, 2007). Jag fick sedan se att hon tillsammans med två andra skrivit en bok som kan ses som handbok i att jobba med rika problem (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Ungefär halva boken ägnas åt ett antal problem. Dels finns problemen för kopiering, dels några olika Lösningstrategier för varje problem. På en föreläsning tipsade Eva Taflin om en bok med 32 rika problem med Lösningsförslag (Larsson, 2007) som jag därefter skaffade. Ofta tar det två lektioner att jobba igenom ett rikt problem. Första lektionen går åt till att förstå problemet, leta strategi och lösa det. Andra lektionen går åt till att redovisa och diskutera olika lösningar. Ibland kommer inte flera strategier spontant från eleverna, men då planterar jag

idén hos dem: *Kan man göra en systematisk prövning i tabell? Kan man lösa den med hjälp av ekvation? Kan en bild vara en del av lösningen?* Har man riktigt duktiga elever i klassen så kan det vara en god idé att i förväg tänka ut en variant av problemet som är ännu svårare, eller att ha något annat problem att ge dem då de är klara långt före de andra.

4.6 Instruktör eller lärare?

Så här i efterhand kan jag se att mina första år av undervisning i hög grad var instruerande. Jag höll genomgångar som förklarade hur man ska göra för att beräkna ränta, lösa ekvationer, beräkna volym och så vidare. Är det att vara lärare? Nej, det tycker inte jag. Snarare handlar den typen av undervisning om att vara matematikinstruktör. Inget fel med att vara matematikinstruktör, men det ska inte vara den dominerande rollen man har i klassrummet. När jag förstod skillnaden mellan att vara lärare och instruktör började jag successivt övergå till att låta lärarrollen dominera. Vad jag menar skiljer en lärare från en instruktör återkommer jag till längre fram.

Som lärare började jag få ut mer av elevernas potential än tidigare. Elever som jag tidigare hade kategoriserat som "G-elever" visade emellanåt VG-kvaliteter. (Detta hände under den förra läroplanens tid.) Det sporrade mig att utveckla mitt sätt att interagera med eleverna, och det har blivit tydligt för mig att eleverna har mycket mer förmåga att förstå matematik än jag lyckas utnyttja. Jag är idag övertygad om att, om man bortser från någon enstaka elev i varje klass som har specifika svårigheter, så kan alla elever nå betyget C. Troligtvis kan minst hälften nå A om de får chans att utnyttja hela sin potential, förmodligen ännu fler. Att betygsstatistiken inte ser ut så i mina klasser beror på att jag inte lyckas tillräckligt bra med min undervisning.

Visst finns det andra förklaringar till varför elever underpresterar. Det kan vara struligt hemma, alldeles för många träningstillfällen, olycklig kärlek etc. Men hur intressanta är de förklaringarna egentligen? Jag kan inte påverka dessa faktorer i nämnvärd grad. Det vi från skolans sida kan göra är att skapa rätt förutsättningar för varje elev så att de faktorer som gör att eleven underpresterar stannar utanför klassrummet. Det är lättare sagt än gjort, men vi får aldrig abdikera och skylla på problem utanför skolan. Min grundsyn är alltså att när en elev misslyckas med att lösa en uppgift är det mitt misslyckande, vilket jag också brukar säga till eleverna. Man kan fundera över vilken elev som får mest drivkraft att vilja förbättra sig; den som känner sig misslyckad, eller den som tror att läraren än så länge inte lyckats hjälpa eleven? Jag fick ett ganska tydligt svar på den frågan under läsåret 2013/2014. Jag fick en årskurs 9 som jag inte kände sedan tidigare. För att inte göra eleverna osäkra under sitt sista år i grundskolan valde jag att följa boken, precis som de var vana vid. Men jag använde boken, och andra uppgifter vid sidan om, på ett öppet sätt. Till en början var de tysta och osäkra, men så småningom började de redovisa och diskutera lösningar. Efter ett

tag hade vi prov, och jag blev förvånad över hur dåligt resultatet var i förhållande till vilka kunskaper jag hade sett under lektionerna. Då jag lämnade tillbaka proven för att gå igenom dem så sa jag som det var:

Jag är besviken på resultatet. Det är mycket sämre än jag hade väntat mig av er.

När jag sagt det såg de naturligtvis skamsna ut, men jag fortsatte:

Ni är tillräckligt smarta för att kunna bättre än så här, så jag har inte undervisat er på rätt sätt. Ni måste få en ny chans, vi kör samma ämnesområde två veckor till, och sedan får ni göra prov på det igen.

Tjugo förvånade ansikten stirrade på mig och undrade om de hört rätt.

Ni ska veta att det aldrig är ert fel då ni inte lärt er tillräckligt. Det är min uppgift att hitta sätt att undervisa så att ni lär er. Men jag behöver er hjälp med en sak; sitt inte och låtsas att ni kan. Det är nämligen bara ni själva som kan lära er, jag kan bara hjälpa er på traven, men då måste jag få höra hur ni tänker.

Det blev en markant scenförändring efter det. Ungefär en fjärdedel av klassen började satsa på de två högsta betygen (och det blev tre A och två B på nationella provet av dem senare). Ungefär lika många blev lite mer medvetna om sin egen roll i lärandet, men satte inte upp några ambitiösa mål i första skedet. Senare började de satsa lite mer och lyckades ganska bra till slut. Resten jobbade på som tidigare, men lyckades bättre. Förmodligen för att de inte kände lika mycket press längre.

Här passar det bra att återknyta till rubriken; Instruktör eller lärare?

Skillnaden ligger implicit i min sista replik ovan. Som lärare agerar jag utifrån det faktum att lärandet sker hos eleven. Om jag ska kunna påverka lärandet måste jag förstå hur eleven tänker och anpassa mitt sätt att hjälpa eleven utifrån det. Helst genom att ställa frågor som tydliggör feltankar för eleven, så att den kan lämna dem bakom sig och ta till sig nya sätt att tänka. För att exemplifiera vad det är för typ av frågor jag ställer till eleven för att tydliggöra en feltanke återger jag ett replikskifte som ofta dyker upp i olika skepnader. Det är autentiskt från en lektion nyligen, men återgivet från minnet:

Läraren: *Hundrafemtio dividerat med noll komma ett – det kan du räkna ut i huvudet?*

Eleven: *Femton!*

Läraren: *Vad blir hundrafemtio dividerat med tio?*

Eleven: *Femton?*

Läraren: *Så att dividera hundrafemtio med tio ger samma svar som om man dividerar med en tiondel?*

Eleven: *Ja?*

Läraren: *Vad blir hundrafemtio multiplicerat med noll komma ett?*

Eleven: *Femton!*

Läraren: *Får man alltså samma svar då man dividerar hundrafemtio med noll komma ett som när man multiplicerar med samma tal?*

Eleven: *Nej, så kan det inte vara.*

Ett sådant replikskifte tar ofta några minuter, så varför slösa tid på det när jag kunde ha talat om hur man ska göra från första början?

Eleven har etablerat en feltanke. Troligtvis en kombination av att det alltid blir mindre då man delar, och att det blir mindre då man multiplicerar med tal mellan noll och ett. Eleven verkar kunna multiplicera med noll komma ett och använder det i en felaktig situation i första försöket. Den viktigaste slutsatsen här är att eleven har lärt sig en metod utan att förstå den begreppsliga bakgrunden till att metoden fungerar. Som lärare måste jag alltså hjälpa eleven att göra beräkningen med hjälp av ett begreppsligt resonemang utifrån tiondelar och innehållsdivision. Men först måste det bli uppenbart för eleven att hon missförstått metoden. Annars kommer hon snabbt falla tillbaks till att använda metoden på det missförstådda sättet, eftersom det tar längre tid att komma fram till ett svar genom resonemang. När eleven väl insett att hon förstått metoden fel blir hon mer öppen för att lösa liknande uppgifter med hjälp av begreppskunskaper, och så småningom lära sig metoden rätt.

4.7 Variationsteori

Öppen matematik är den rubrik jag satt på undervisning som öppnar upp matematiken så att dess väsen blir åskådliggjord. Det finns olika sätt att göra det på och en del har jag beskrivit tidigare. En kraftfull metod att använda bygger på variationsteori, som till stora delar har formulerats av Marton vid Göteborgs universitet (Marton i Tidskrift för lärarutbildning och forskning, 2007). Enligt variationsteorin finns det kritiska aspekter när det gäller förståelsen av ett kunskapsinnehåll. Det gäller att synliggöra den kritiska aspekten för eleven genom att skapa ett variationsmönster. För att det lilla barnet ska förstå vilka objekt som är hundar måste det få se många olika hundar, men även sådana som liknar hundar men inte är det. Det är i detta fall inte helt lätt att beskriva den kritiska aspekten, men den kan ändå tydliggöras genom variationsmönstret. En sak är konstant (fyrbenta djur), och en sak varierar (olika raser/arter).

Hur användandet av variationsteori kan användas i klassrummet är enklast att beskriva med exempel. Först ett exempel där jag under en lektion blev tvungen att använda mig av ett variationsmönster för att hjälpa en elev. Det var alltså inte planerat i förväg, men jag använde mig av variationsteoretiska principer.

Jag hade en elev som verkade förstå vad en radie är, och han kunde till och med använda begreppet för att via diameter och med hjälp av pi räkna ut en omkrets på en hel cirkel

och en halvcirkel. Men plötsligt i vissa situationer pratade vi förbi varandra. Efter mycket ritande och frågande upptäckte jag att riktningen på radien var avgörande för om han skulle uppfatta den som en radie. När radien var ritad i någon av de horisontella eller vertikala riktningarna såg han det som en radie. Men om det fanns en horisontell diameter och en slumpmässigt ritad radie i samma cirkel såg han radien som ett vinkelben. Hans förståelse av vad en radie är var alltså att en linje ritad från medelpunkten och ut till någon av positionerna klockan 12, 3, 6 eller 9 är en radie. Dessutom var hans förståelse när det gäller relationen radie/diameter begränsad till att en horisontell eller vertikal diameter består av två radier. Riktningen av radien respektive diametern var alltså en kritisk aspekt för hans förståelse av begreppet radie.

Inom parentes sagt; det är inte svårt att förstå hur han förvärvat missuppfattningen att radier och diametrar alltid är vertikala eller horisontella. Jag hade inte använt matematikboken på ett bra sätt. Av någon anledning är det nästan regel att radier och diametrar är ritade horisontellt eller vertikalt i matteböcker. Förmodligen hade jag själv ritat på samma sätt på tavlan. Ett exempel på hur fel det kan gå om man oreflekterat låter eleverna jobba i matematikboken.

För att tydliggöra den kritiska aspekten för eleven måste jag visa ett variationsmönster där det mesta hålls konstant medan den kritiska aspekten varierar, i detta fall radiens riktning. I ett första steg visade jag en radie i taget i en och samma cirkel, alltså varierade jag endast riktningen och höll resten konstant. Sedan ritade jag in flera radier samtidigt med olika riktningar. Alltså varierade jag både riktning och antal. Sedan fick två radier bilda diameter med olika riktningar. Jag höll då antalet och relation till diameter konstant (relationen var att två radier bildar en diameter), men varierade riktningarna. Slutligen lät jag två radier bilda en diameter och ritade in olika antal radier (som då hade relation till diametern genom att bilda vinkel mot den) i olika riktningar i samma cirkel och lät honom peka ut hur man kan rita in radier för att bilda nya diametrar. Efter detta hade jag öppnat dörren till denna del av matematiken för honom, en del som jag bara låtit honom kika på genom nyckelhålet dessförinnan.

Nästa exempel på användandet av variationsmönster är en planerad lektionsaktivitet som många känner igen sig i. Det handlar om introduktion av tiopotenser. Det är lätt att falla i fällan att leda in eleverna på att exponenten talar om hur många nollor det ska vara. En form av ytlig kunskap som är användbar i många situationer så länge man kommer ihåg minnesregeln. Tyvärr finns det många minnesregler att memorera, och om de inte bottnar i förståelse blir det lätt sammanblandningar. En introduktion som syftar till att eleverna ska förstå varför det finns en koppling mellan exponenten och antalet nollor tar avstamp i att vårt talsystem är ett positionssystem i tiobas. För att introduktionen ska kunna leda till förståelse måste eleverna ha fått lära sig att siffrorna i ett tal byter position vid multiplikation och division med tio, hundra etc., inte enbart att man flyttar decimaltecknet. De måste också ha klart för sig att potenser är ett förkortat skrivsätt för upprepade multiplikationer. Ett vanligt sätt att introducera tiopotenser är att skriva upp systematiskt utvalda exempel på tavlan steg för steg:

$$\begin{aligned}
10^3 &= 1000 \\
10^2 &= 100 \\
10^1 &= 10 \\
10^0 &= 1 \\
10^{-1} &= 0,1 \\
10^{-2} &= 0,01 \\
10^{-3} &= 0,001
\end{aligned}$$

Den variationsteoretiska kopplingen är att man håller basen konstant och varierar exponenten för att ett mönster ska uppenbara sig.

Särskilt exponenten noll brukar ge upphov till diskussion. Jag brukar börja med 10^3 (10 upphöjt med tre) och fråga vad de tror att det blir, vilket de alltid kan. Sedan fortsätter jag steg för steg på samma sätt tills det tar stopp (om det tar stopp). Vid 100 brukar det bli svårt för eleverna, och ibland kommer man inte längre än dit innan man får hjälpa till att resonera utifrån mönstret. Om inte eleverna lyfter saken tidigare gör jag färdigt hela listan innan vi börjar leta mönster tillsammans. En av de första saker som kommer upp är kopplingen mellan exponenten och antalet nollor. Men jag frågar då alltid vidare efter matematiska mönster. Det viktigaste att lyfta fram är att när man i vänster led minskar exponenten med 1, så dividerar man höger led med 10 – och tvärt om ifall man går åt andra hållet. Efter diskussionen om varför det blir på det viset kan det exempelvis se ut så här på tavlan:

$$\begin{aligned}
-1 \swarrow 10^3 &= 1000 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^2 &= 100 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^1 &= 10 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^0 &= 1 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^{-1} &= 0,1 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^{-2} &= 0,01 \searrow \div 10 \\
-1 \swarrow 10^{-3} &= 0,001 \searrow \div 10
\end{aligned}$$

$$10^3 = 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^2 = 1 \times 10 \times 10 = 100$$

$$10^1 = 1 \times 10 = 10$$

$$10^0 = 1 = 1$$

$$10^{-1} = 1 \times \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = 1 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0,01$$

$$10^{-3} = 1 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 1 \times \frac{1}{1000} = 1 \times \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$\begin{aligned}
+1 \swarrow 10^3 &= 1000 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^2 &= 100 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^1 &= 10 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^0 &= 1 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^{-1} &= 0,1 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^{-2} &= 0,01 \searrow \times 10 \\
+1 \swarrow 10^{-3} &= 0,001 \searrow \times 10
\end{aligned}$$

När jag känner att eleverna greppat de viktiga upptäckterna får de själva undersöka vad det blir för mönster då man gör på samma sätt med basen 5. De elever som snabbt kommer fram till att en minskning av exponenten med 1 ger en division med 5 får då undersöka saken med basen **a**. Eleverna upptäcker alltså långt mycket mer än sambandet mellan exponenten och antalet nollor då det gäller tiopotenser, de närmar sig en generell kunskap. För de flesta blir det inte konstigt att exponenten noll alltid ger svaret 1 oavsett bas när de gjort denna undersökning.

5. Resultat och diskussion

För att avsluta resonemanget om att man i varierande grad lyckas väcka engagemanget med öppen matematik vill jag konstatera att det tar tid för eleverna att vänja sig vid detta sätt att jobba. Den stängda matematikundervisningen upplevs visserligen som tråkig av eleverna, men de känner sig även trygga eftersom de vet vad som ska hända hela tiden. När de plötsligt får en lärare som hoppar hit och dit i olika matematikböcker och ger konstiga instruktioner kan de börja känna sig otrygga. *Kan vi inte bara få räkna?! Vi kommer ju efter dom andra – de ligger på sidan 37!* är ett par exempel på vad jag brukar få höra i början när jag får en ny klass. Då måste man naturligtvis ta deras oro på allvar. Jag brukar förklara för dem varför jag lägger upp undervisningen på detta sätt. Det argument som brukar vara framgångsrikt att använda är att undervisningen blir mycket roligare om man inte jobbar från början till slut i en matematikbok. Men man måste alltså räkna med att övergången från en stängd till en öppen matematikundervisning kommer att vara problematisk i någon mån. Man kommer även som lärare att bli osäker på om man är på väg åt rätt håll, det blir jag fortfarande efter rätt många år med detta sätt att jobba. Men jag bejakar osäkerheten och ser den som ett omedvetet ifrågasättande av min egen undervisning. Den dagen jag börjar känna mig säker på att jag gör rätt blir jag orolig på riktigt!

En del elever blir otrygga och tappar motivation av öppen undervisning. Det är de elever som inte skulle klarat ”marshmallowstestet”. Det vill säga de elever som inte kan vänta så länge på belöningen som är kopplad till en ansträngning. Ur elevens perspektiv innebär öppen undervisning att man måste igenom en fas i lärandet där man känner osäkerhet och okunskap. Hur lång den fasen får vara varierar för olika individer. En del elever stimuleras, medan andra blir otrygga. Som lärare gäller det att vara lyhörd och anpassningsbenägen, vilket kan innebära att man måste vara beredd att periodvis ”stänga” undervisningen för vissa elever. Det är ibland en svår balansgång hur man ska reagera på elever som kräver att man bara lär dem en metod. Att behålla undervisningen öppen får aldrig bli viktigare än den enskilda elevens bästa.

Jag beskriver att jag mötte elevernas känsla av att undervisningen saknade struktur bland annat genom att införa loggbok. Syftet var att öva upp elevens metakognition genom att de reflekterade över sitt lärande en gång i veckan. Genom att de ser sitt eget lärande ser de också undervisningens struktur. Men det byggde på att jag kommenterade deras inlägg varje gång. Det fungerade så länge jag bara undervisade på detta sätt i en grupp, men när jag året efter hade två grupper som skrev loggböcker blev det svårt att hinna med.

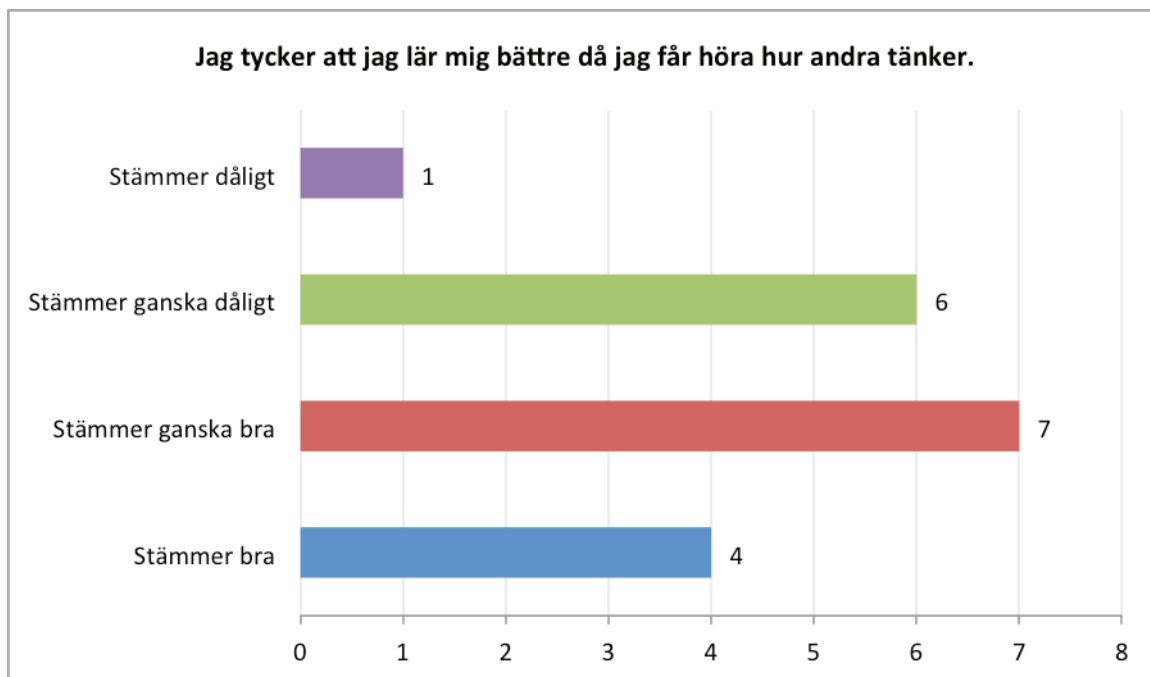
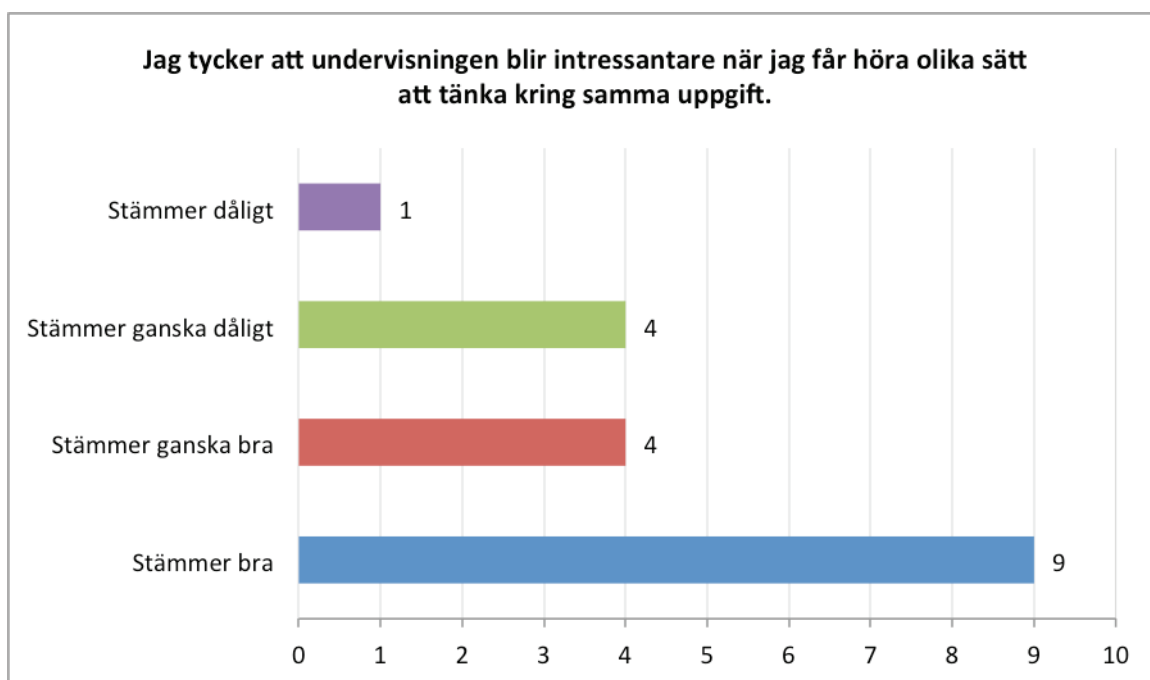
Till slut rann loggboksskrivandet ut i sanden. Idag är eleverna på ett helt annat sätt vana vid att kommunicera via sociala medier. Det öppnar för en möjlighet att låta eleverna reflektera digitalt. En sak jag inte gjorde då de skrev loggböcker var att använda kamratbedömning. I en digital värld kan jag som lärare lätt låta eleverna kommentera varandras reflektioner och ganska snabbt ta del av deras kommunikation. Det här är en av de saker jag kommer att försöka utveckla i min undervisning.

I denna artikel har jag drivit tesen att all god matematikundervisning bygger på att man lyfter fram matematikens väsen, att man öppnar upp matematiken genom att lyfta fram viktiga matematiska principer. Har jag då några belägg för tesen? I vetenskaplig mening har jag inte presenterat några belägg för att min tes stämmer. Jag skulle då ha behövt undervisa parallella klasser på olika sätt, gjort förtest, eftertest och så vidare. Däremot vet jag genom de enkäter jag genomfört att eleverna uppfattar det som att de lär sig mer matematik på detta sätt. Att jämföra betyg och resultat mellan olika årgångar är inte meningsfullt, så det har jag inte gjort. Ett tydligare belägg för att mina elever lär sig mer idag än de elever jag undervisade på ett stängt sätt, är att jag undervisar på en mer avancerad nivå än jag gjorde i den stängda undervisningen. Det beror inte på att jag driver upp ett högre tempo, snarare tvärt om. Genom att jag stannar upp och ger eleverna tid att på djupet förstå matematiken, får de också kunskaper nog att ställa nyfikna frågor som ofta driver oss in i en mer avancerad matematik än jag planerat. Eleverna är alltså inte mottagare av undervisningen, de äger den.

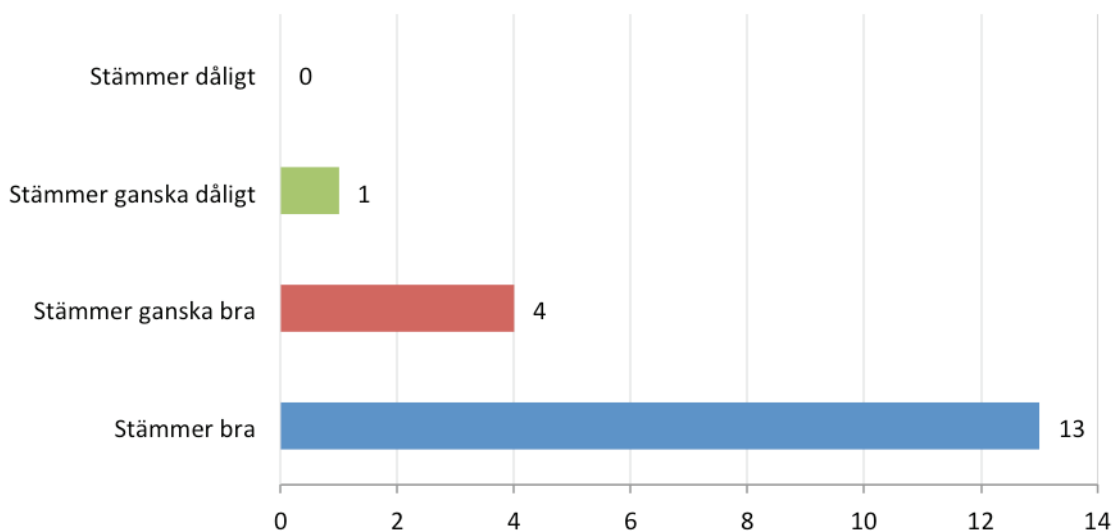
Avslutningsvis; att hitta balansen mellan kunskapande och bevästande undervisning är viktigt. Eftersom undervisningstiden är begränsad känner jag ibland att tiden inte räcker till. Jag har valt att lägga en del av bevästandet som läxor. Det finns naturligtvis problem med det. En del elever gör inte läxor så ofta, och en del av dessa elever klarar sig bra utan att göra läxor. Men vissa elever som verkligen behöver läxorna för att bevästa nya kunskaper hoppar över läxorna. Ibland löser man det genom dialog med eleven och föräldrarna, men enstaka elever missar den här möjligheten till bevästande. Det är naturligtvis en brist i upplägget jag har. Man kan alltså konstatera att inte heller *Öppen matematik* är en undergörande kur. Hur man än lägger upp sin undervisning så finns det biverkningar. Det gäller alltså att vara lyhörd för dessa så att man kan begränsa skadorna av dem.

6. Bilagor

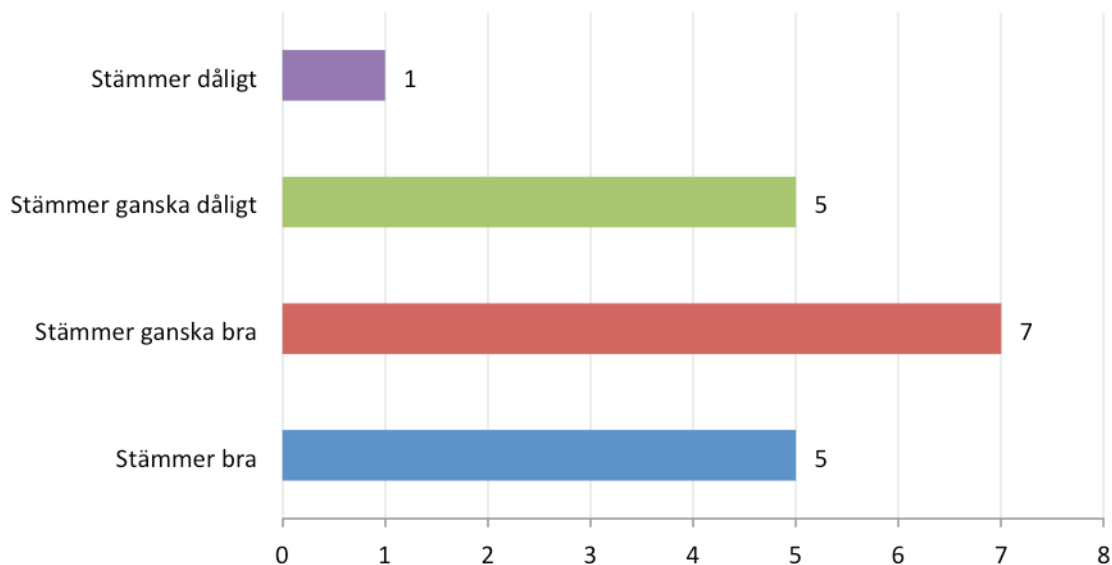
Bilaga 1. Enkät genomförd med en klass i årskurs 7.



Jag tycker att jag förstår bättre när du förklarar varför man gör på ett visst sätt.



Jag skulle hellre vilja ha mer tid att öva själv i boken.



Här kan du skriva någon fri kommentar om undervisningen om du vill.

Antal	Värde
1	Haj
1	På tavlan får man inte tänka och förstå på sitt sätt. Mycket enklare att förstå i bok/häfte och jobba i sin egna takt.
1	När man inte fattar helt kan det va skönt att få jobba i boken. För att hitta lösningen själv. Annars tycker jag inte om att jobba i boken.
1	Jag tycker att vi borde koncentrera lektionerna med och fördjupa oss i ämnet mer istället för att hålla på för länge. Vissa lektioner och ämnen inom matematiken kan bli lite långtråkiga ibland. speciellt och man redan vet hur man löser problemen. därför så ska man ha tillgången till fördjupning av ämnet mer.

Bilaga 2. Bild av tavlan från det första lektionsexemplet.

Handwritten mathematical work on a whiteboard, showing various methods to calculate $0,5 \times 8$.

Top section (boxed): $0,5 \times 8$

Below the box:

$$0,5 \times 8 = \frac{8}{2} = 4$$

$$0,5 \times 4 = 2 \quad (5 \times 4 = 20 \rightarrow 0,5 \times 4 = 2)$$
$$2 \times 2 = 4$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 8 = 8 \\ \hline 2 \end{array} = \frac{8}{2} = 4$$

$$1 \times 4 = 4 \quad (0,5 \times 2) \times (8/2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,5 + 0,5 = 1 \\ 1 \times 4 = 4 \end{array} \right\} \underbrace{0,5 + 0,5}_{1} + \underbrace{0,5 + 0,5}_{1} + \underbrace{0,5 + 0,5}_{1} + \underbrace{0,5 + 0,5}_{1}$$

7. Referenser

- Bråten, Ivar (1998). "Vygotskij och pedagogiken." I Bråten, I. & Thurmann-Moe, A C. *Den närmaste utvecklingszonen som utgångspunkt för pedagogisk praxis*. Studentlitteratur, ss. 103-119.
- Gärdenfors, Peter (2010). *Lusten att förstå: om lärande på människans villkor*. Natur & kultur
- Hagland, Kerstin, Hedrén, Rolf & Taflin, Eva (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. Liber
- Helmertz, Tomoko (2008). *Problemlösning i Japan och Sverige*. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2126_08_1.pdf (2014-06-12)
- Larsson, Maria (2007). *32 rika problem i matematik*. Liber
- Skolverket (2003). *Lusten att lära: med fokus på matematik: nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002*. Skolverket
- Taflin, Eva (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällena till lärande*. Umeå universitet, 2007
- Tillgänglig på internet: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-1384>
- Tidskrift för lärarutbildning och forskning (2007). Nr1 2007, sid. 31-44.
- Fakultetsnämnden för lärarutbildning, Umeå universitet

