SKOLPORTENS PUBLIKATIONSSERIE FÖR
DOKUMENTERAT UTVECKLINGSARBETE

LUTNINGEN ÄR EN KVOT!

En Learning Study för att underlätta elevers förståelse för lutningen av en linjär funktion

FÖRFATTARE:

Birgitta Nilsson
Camilla Ekström
Victor Dahlberg

SKOLPORTEN

UTVECKLA SKOLAN

6/2023

SAMMANFATTNING

REVIDERINGEN AV ÄMNESPLANERNA i matematik på gymnasiet hösten 2021 innebar att en del av centrala innehållet i kursen matematik 2 om funktioner flyttades till kursen matematik 1, något som visat sig vara extra svårt för eleverna. I artikeln beskrivs en Learning Study där artikelförfattarna ville utgå ifrån elevernas vanliga missuppfattningar kring lutningen på en linjär funktion. Studien genomfördes i matematik 1b på Nacka gymnasium under läsåret 22/23 för att se hur en lektion kan designas för att stärka elevers lärande och öka förståelsen för lutningen av en linjär funktion genom att se lutningen som en kvot. Eftertestet visade en skillnad i korrekt svar på en fråga som berörde förståelse kring begreppet lutning.

Birgitta Nilsson är gymnasielärare och förstelärare i matematik
och data på Nacka gymnasium. E-post: birgitta.1.nilsson@nacka.se

Camilla Ekström är gymnasielärare och förstelärare i matematik
och teknik på Nacka gymnasium. E-post: camilla.ekstrom@nacka.se

Victor Dahlberg är gymnasielärare i matematik och fysik på Nacka gymnasium.
E-post: victor.dahlberg@nacka.se

Denna artikel har den 8 december 2023 accepterats för publicering
i Skolportens artikelserie för dokumenterat utvecklingsarbete.

Denna artikel är publicerad i Skolportens serie för dokumenterat utvecklingsarbete, ”Utveckla skolan”: www.skolporten.se/forskning/utveckling/

Aktuella Författaranvisningar & Skrivregler:
www.skolporten.se/forskning/skolutveckling/skolportens-utvecklingsartiklar/

Vill du också skriva en utvecklingsartikel? Mejla till redaktionen@skolporten.se

INNEHÅLL

INLEDNING

HÖSTEN 2021 REVIDERADES ämnesplanerna i matematik för gymnasieskolan. Innan förändringarna var det i kursen matematik 1b större tonvikt på grundläggande aritmetik såsom bråk- och procenträkning. I syfte att minska överlappet mellan grundskolans och gymnasieskolans matematik togs då delar av det centrala innehåll som syftade till repetition i matematik 1b bort, och det tomrum som uppstod fylldes av innehåll som tidigare låg i kursen matematik 2b (Skolverket 2023).

Kristiansson och Sollerman (2022) skrev en analys av de nationella proven. Där lyftes det fram av deltagande lärare att den nu var en "Större tonvikt på funktioner än vad jag väntat mig" (ibid.). Författarna till analysen skriver också om hur andelen elever som minst nådde betyget E på de nationella proven i matematik 1a och 1b våren 2022 var lägre än vid tidigare prov (ibid.).

En av förändringarna som genomfördes var att undervisningen kring linjära funktioner (y=kx+m) och funktionsbegreppet (y=f(x)) nu flyttats från kursen matematik 2b till kursen Matematik 1b (Skolverket 2023). Detta var innehåll som en del av elever i kursen matematik 2b (som läses i årskurs 2) hade svårt att förstå.

I en fördjupad analys lyfts uppgift 18 från nationella provet i matematik 1b (VT22) upp, som handlar om att bestämma en linjär funktion (på formen y=kx+m) utifrån två givna punkter. Det valdes ut 100 slumpmässiga elevarbeten och lösningarna kategoriseras enligt tabellen nedan (Axelson, Efremova & Kristiansson 2022).

Av de elevers lösningar som analyserades vill vi[1] betona framför allt två saker; dels att endast 34% av elevsvaren var helt korrekta på uppgiften och dels att ett vanligt felsvar var att eleverna bytt plats på täljare och nämnare (x/y istället för y/x) i beräkningen av k-värdet (lutningen).

I en studie av Zaslavsky, Sela och Leron (2002) belyses att elever tenderar att se på lutning antingen

Tabell 1: Fördelningen av elevsvar för uppgift 18 på nationella provet i matematik 1b skrivet vårterminen 2022 (Axelson, Efremova & Kristiansson 2022).

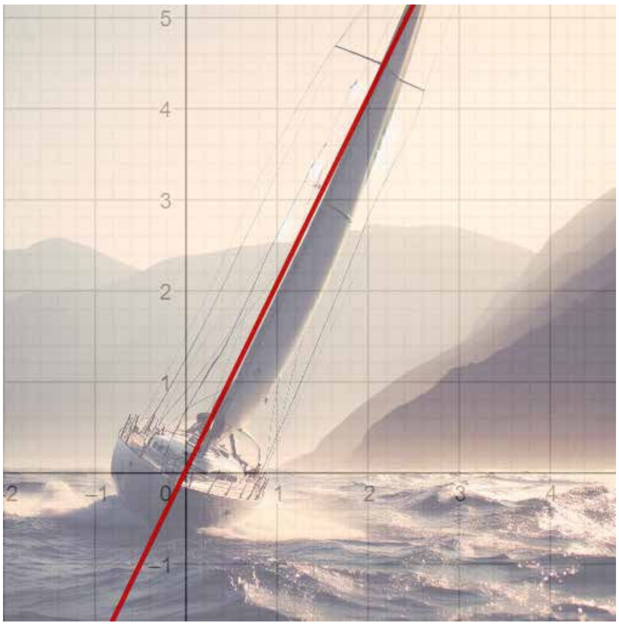
	Andelen av elevsvaren i %
Lösning med korrekt svar (2/0/0)	34
Beräknar k-värdet korrekt (1/0/0)	25
Felsvar, $k = \frac{x}{y}$	12
Felsvar, försök att rita linjen	10
Felsvar, övriga	13
Inget svar	6

1 Med *vi* avses i fortsättningen artikelförfattarna.

visuellt eller analytiskt. Två grafer kan alltså, visuellt, se ut att luta lika mycket men ha olika graderingar på axlarna – de skulle då ha samma visuella lutning men olika analytiska lutningar. När eleverna skall bestämma lutningen på en linjär funktion är vår uppfattning att lärare generellt menar den analytiska lutningen (hur mycket värdet förändras på y-axeln givet en förändring på x-axeln, eller kvoten $k=\Delta y/\Delta x$), men att övertyga eleverna om att två linjära funktioner har olika lutning när graferna ser likadana ut är svårt. Vidare belyser en studie av Stump (2001) att elever också har en tendens att koppla begreppet lutning till ett vinkelmått.

Pettersson (2016) skriver om gymnasieelevers förståelse av linjära funktioners algebraiska och grafiska representation vilket visar tydligt hur elever i Sverige, Israel och USA i väldigt låg utsträckning klarar av att bestämma lutningen ur en given graf. Med många olika betydelser av ordet lutning i vardagen är det förståeligt att det är svårt. Till exempel skulle vi säga att en segelbåt *lutar mycket* när mastens topp närmar sig vattenytan men i en sådan situation har vi en väldigt låg lutning analytiskt sett (se Figur 1).

I den här studien utgick vi därför utifrån att begreppet lutning av en linjär funktion kan förstås bättre genom att belysa lutning som både visuell och analytisk. Vi ville också undersöka om det vanliga felsvaret där lutningen beräknas med kvoten x/y kan bero på svårighet kring bråkräkningen i sig.



Figur 1: Segelbåt med en linjär funktion inritad i mastens riktning

SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNING

SYFTET MED DENNA artikel är att beskriva hur vi arbetade fram ett lektionsupplägg som ökade förståelsen för lutningen av en linjär funktion genom att se värdet som en kvot - där täljaren och nämnaren har separata egenskaper. Genom att använda en Learning Study ville vi utgå ifrån elevernas vanliga missuppfattningar (kritiska aspekter) kring k-värdet (lutningen) på en linjär funktion. Denna Learning Study genomfördes under läsåret 22/23 på Nacka gymnasium med elever i årskurs 1 och kursen matematik 1b och matematik 1c.

FRÅGESTÄLLNING:

VILKA ASPEKTER I undervisningen får elever att öka förståelsen för lutningen genom att använda värden på k-värdet i bråkform?

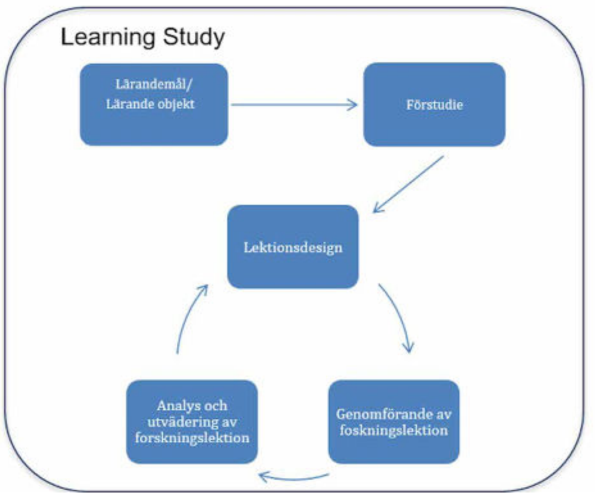
METOD OCH GENOMFÖRANDE

LEARNING STUDY

STOCKHOLM TEACHING & Learning Studies (STLS) skapar en möjlighet för deltagare från olika skolor i Stockholms län att få vetenskapligt stöd i arbetet med ämnesdidaktiska projekt där alla delprojekt organiseras som en Learning Study. Enligt Maunula, Magnusson och Echevarría (2011) är en Learning Study en kollektiv och cyklisk process där de deltagande lärarna lär tillsammans, om sina elevers lärande. Den cykliska processen innebär att lektionsupplägg revideras under en studies gång. Under den cykliska processen kan deltagande lärare, via STLS, få stöd från handledare. En Learning Study kan dessutom hjälpa lärarna att reflektera över sin undervisning och förbättra sin undervisning. En del av STLS verksamhet är ämnesdidaktiska ramprojekt till exempel inom ämnet matematik (Pedagog Stockholm 2023).

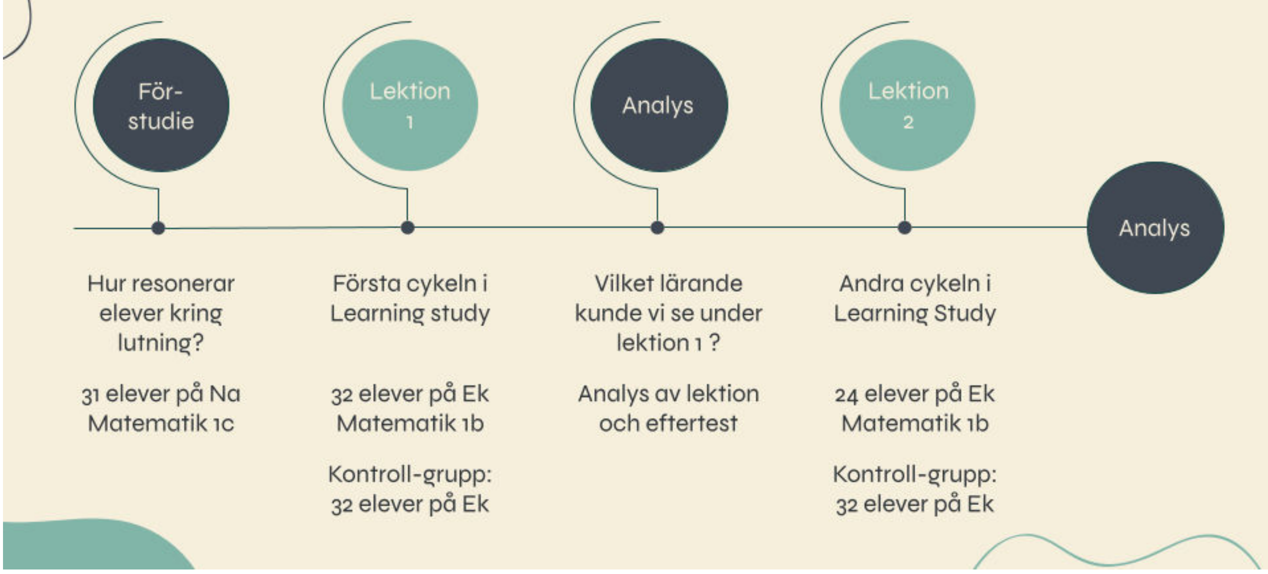
Under läsåret 22/23 genomförde vi ett ramprojekt via STLS med ett syfte att undersöka hur vi kunde stärka förståelsen för lutning av linjära funktioner genom att uttrycka k-värdet som en täljare och nämnare snarare än “bara ett tal”. Resultatet av det arbetet blev då, genom en Learning Study, en lektion med innehåll som låter eleverna få upptäcka k-värdet som en kvot.

Vi undersökte hur väl valda aktiviteter kunde hjälpa eleverna att se styrkan i att ange k-värdet som en kvot, med en täljare och en nämnare, eftersom detta beskriver k-värdets egenskaper. Projektet försökte även att ta itu med vanliga missuppfattningar bland eleverna, till exempel skillnaden mellan en linje med k=1/2 och k=2/1, som ofta beror på att eleven ser k som kvoten x/y.



Figur 2: Modell av Learning Study.

GENOMFÖRANDE



Figur 3: Stegen i detta projekt. Na står för naturvetenskapliga programmet och Ek för ekonomiprogrammet.

DETTA PROJEKT GENOMFÖRDES i form av en Learning Study i tre cykler med en förstudie i en klass på naturvetenskapsprogrammet i kursen matematik 1c och sedan två forskningslektioner i två klasser på ekonomiprogrammet i kursen matematik 1b (kallade forskningslektionerna nedan). Kontrollgrupperna vi använde var parallellklasser till de klasserna som var med i studien. Alla lektioner i studien genomfördes på Nacka gymnasium under läsåret 22/23. Lektionsupplägget förändrades mellan alla tillfällena i syfte att ännu bättre belysa det vi ville betona med lektionen.

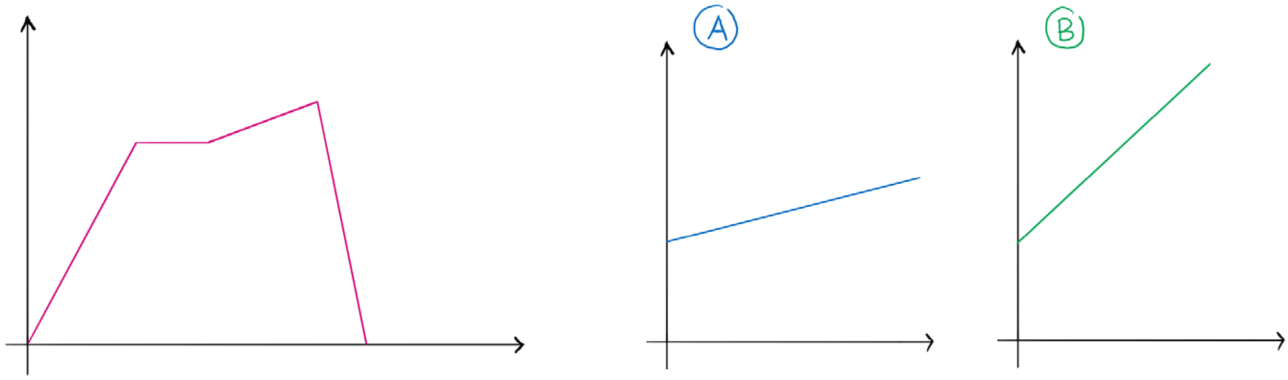
Syftet med förstudien i naturklassen var således att undersöka elevernas syn på begreppet lutning för att kunna designa forskningslektionen utefter de missuppfattningar som dyker upp. Lektionen innehöll alltså ingen genomgång utan bara elevaktiviteterna.

Forskningslektionerna däremot innehöll både aktiviteter och genomgångar i syfte att slutprodukten skulle bli en hel lektion på temat lutning av linjära funktioner. Dessa forskningslektioner spelades in med ljud och bild och analyserades i efterhand. Efter forskningslektionerna genomfördes ett läxförhör med den gruppen cirka tre veckor efter lektionen och ett prov cirka sex veckor efter lektionen för att se hur elevernas kunskaper hade utvecklats.

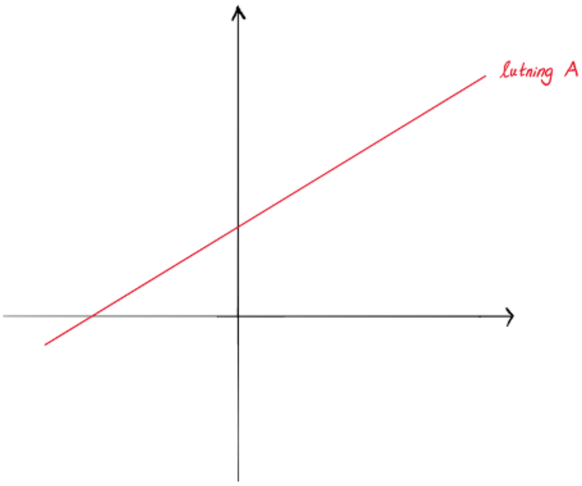
FÖRSTUDIE

UTIFRÅN DET VALDA lärandeobjektet genomfördes förstudien i syfte att titta på hur eleverna refererade till begreppet lutning. Vi skapade aktiviteter för att se om eleverna hade en visuell eller analytisk förståelse av lutning med sig från grundskolan enligt Zaslavsky, Sela och Lerons (2002) definition. Syftet med förstudien var att få en uppfattning av elevernas förståelse för lutning och vilka kritiska aspekter vi kunde se inför de kommande forskningslektionerna i kursen matematik 1b. Lo (2014) anser att det är viktigt att

Figur 4: Aktivitet 1 och 2 på förstudien.



Figur 5: Aktivitet 3 på förstudien.



lärare identifierar de kritiska dragen och vidare de kritiska aspekterna innan själva undervisningen.

Förstudien genomfördes som en del av en ordinarie lektion. Eleverna fick två och två genomföra tre uppgifter (se Bilaga 1) där vi lärare gick runt i klassrummet och lyssnade och antecknade vad eleverna diskuterade angående de uppgifter de tilldelats på temat lutning.

Syftet med första uppgiften var att vi skulle få höra hur eleverna resonerade kring lutning på de olika linjerna ritade i ett koordinatsystem (se grafen till vänster i Figur 4). Vi valde här att inte ge eleverna några markeringar på koordinataxlarna för att se hur eleverna hanterade lutning utan att vi har gett någon riktning.

Andra uppgiftens syfte var att se hur elevernas förståelse av lutning kopplat till koordinataxlarna (graferna till höger i Figur 4). I uppgiften fick eleverna två grafer med olika lutningar där vi hävdade att den grafen som visuellt lutade minst var den som faktiskt hade högst lutning, och eleverna fick diskutera två och två hur detta var möjligt. Vi hoppades få syn på om elever förstår lutning visuellt eller analytiskt, men också väcka tanken hos eleverna att lutning kan betyda olika saker.

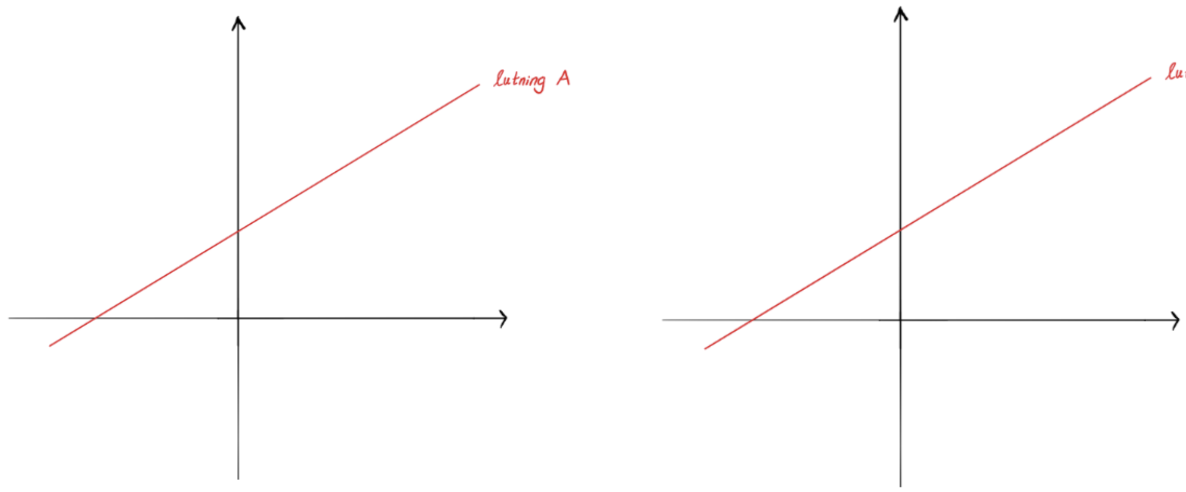
Aktivitet 3 på förstudien var att se hur eleverna refererar till en given linje ritad i ett koordinatsystem (se Figur 5). Linjen hade inget värde på lutningen (bara "lutning A") för att eleverna igen skulle ge sin uppfattning av lutning och ombads rita, i samma koordinatsystem, fyra nya linjer med lutningen 2A , 1/2 A, A/(4) respektive -2A. Vi valde även att ge eleverna, som Lo (2014) menar, ett variationsmönster för att se om eleverna kunde urskilja de olika kritiska dragen.

FORSKNINGSLEKTION 1

I denna första forskningslektion betonades resonemangsförmågan då eleverna parvis fick diskutera de tre aktiviteternas olika frågeställningar (se Bilaga 2) innan den gemensamma diskussionen med läraren. Lektionen designades så att eleverna skulle få tid att i mindre grupper diskutera begreppet lutning för en linjär funktion för att öka förståelsen på ett mer analytiskt plan såsom en kvot, det vill säga förändringen i y-led i förhållande till förändringen i x-led.

Under förstudien såg vissa elever en linjes lutning mer som en vinkel mellan grafen och x-axeln än en kvot. Aktiviteterna 1 och 2a (se Bilaga 2) användes därför som inledande diskussionsunderlag för att syn-

Figur 6: Aktivitet 1 under forskningslektion 1.



Uppgift 1

a. Rita in, i samma koordinatsystem, en linje som lutar *mer* än den röda linjen.

b. Rita in, i samma koordinatsystem, en linje som lutar *mindre* än den röda linjen

Uppgift 2

Om den röda linjen har lutningen A,

a. rita då en linje som har lutningen 2A.

b. rita då en linje som har lutningen 3A.

c. rita då en linje som har lutningen -A.

liggöra de visuella egenskaperna hos en linjär funktion med hjälp av den grafiska representationen. I aktivitet 1 ritades en linje med lutningen A in i ett koordinatsystem utan angivelse av skalan på axlarna. Eleverna skulle sedan rita in andra linjer som till exempel lutar mer än A, mindre än A, lutningen 2A, 3A respektive -2A i samma koordinatsystem (se Figur 6). Grunden till denna aktivitet användes också under förstudien, men nu anpassades uppgifterna till elevernas svar. Om de nu skulle se lutning som ett mått på vinkel så ritades den röda linjen nu så att den skulle ha ungefär lutningen 45° för att fånga eleven som då tänker att en linje med lutning 2A måste ha dubbelt så stor lutning och då alltså luta 90° och då ritas rakt vertikalt. Ännu mer intressant blev lutningen 3A som skulle bli 345°=135°, som då skulle sammanfalla med linjen med lutning -A eller då -45°. I den gemensamma diskussionen med eleverna efter aktiviteten visades påhittade elevsvar (konstruerade av artikelförfattarna) med vanliga missuppfattningar för att berika diskussionen.

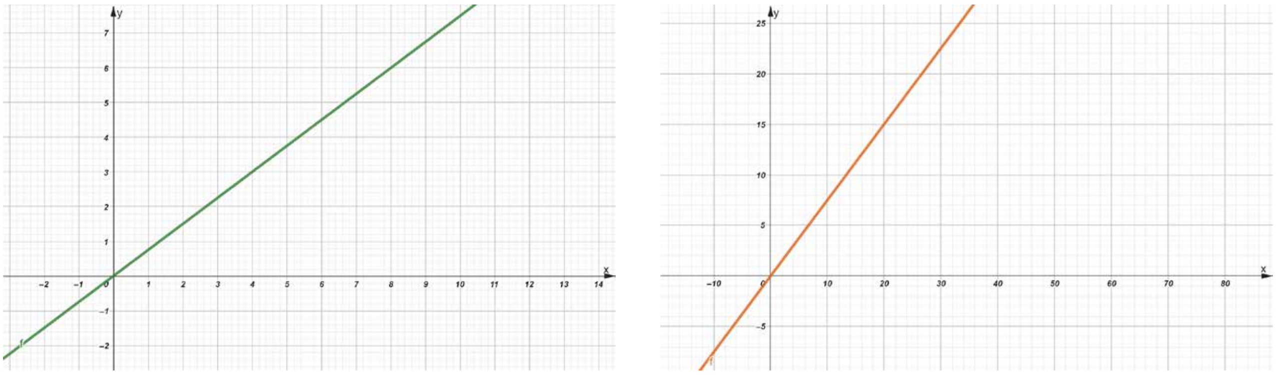
Aktivitet 2a (se Figur 4), som var identisk med aktivitet 2 på förstudien, hade förhoppningar om att få eleverna att uppmärksamma att graderingen på axlarna i koordinatsystemet ändrar den analytiska lutningen men inte alltid den visuella lutningen av en linje. Även i denna aktivitet var koordinatsystemets axlar utan gradering för några av grupperna medan andra grupper fick koordinataxlar med olika skalor. Under den resterande tiden av lektionen fick eleverna arbeta med de nya aktiviteterna 2b (se Figur 7) och 3 (se Figur 8), som inte fanns med i förstudien, som gav dem mer proceduell strategi för begreppet lutning för en rät linje.

I aktivitet 2b fick eleverna två och två, utifrån tidigare erfarenheter från bland annat undervisning i högstadiet, ta fram en linjes lutning, k-värde utifrån två uppritade linjer i olika koordinatsystem med samma lutning, dock har dessa två linjer olika lutning visuellt (se Bilaga 2). Aktiviteten krävde att eleverna tog fram två punkters koordinater från båda graferna för att sedan rita in dessa fyra punkter i ett annat koordinatsystem för att upptäcka att de båda graferna har samma analytiska lutning.

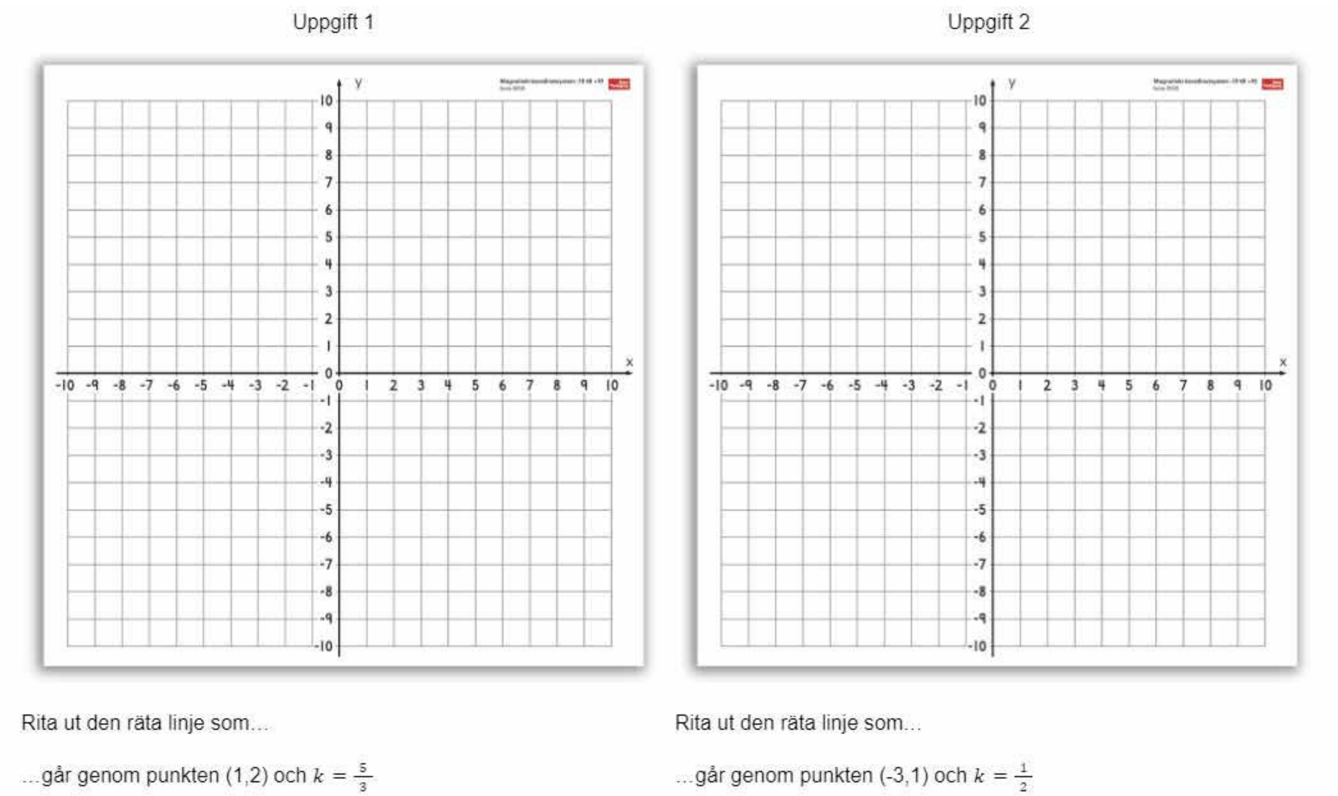
Den sista aktiviteten gav eleverna en strategi för att kunna rita upp en rät linje i ett koordinatsystem utifrån en punkts koordinater med givet k-värde (lutning). Aktivitet 3 (se Figur 8) innehöll fler deluppgifter på samma tema för att ge utrymme för repetition av strategin.

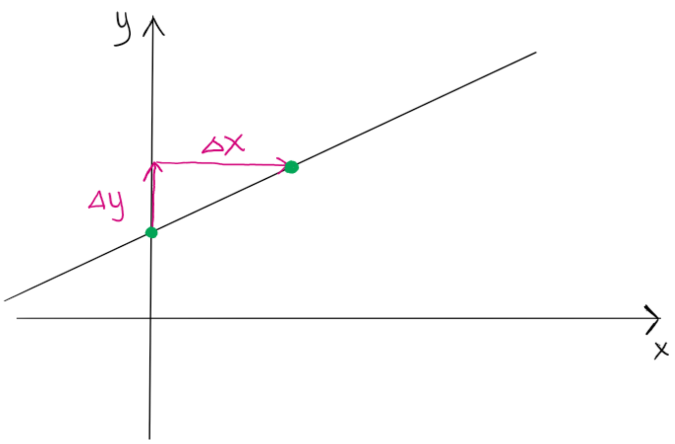
Innan eleverna i par fick jobba med denna uppgift så gick läraren igenom lutning och k-värde som en kvot där täljaren är "steg i y-led" och nämnaren är "steg i x-led" mellan två punkter som ligger på den linjära funktionen. Detta gjordes som alternativ till

Figur 7: Aktivitet 2b under forskningslektion 1.



Figur 8: Aktivitet 3 under forskningslektion 1.





Figur 9: Stegandet från en punkt till en annan på en linjär funktion.

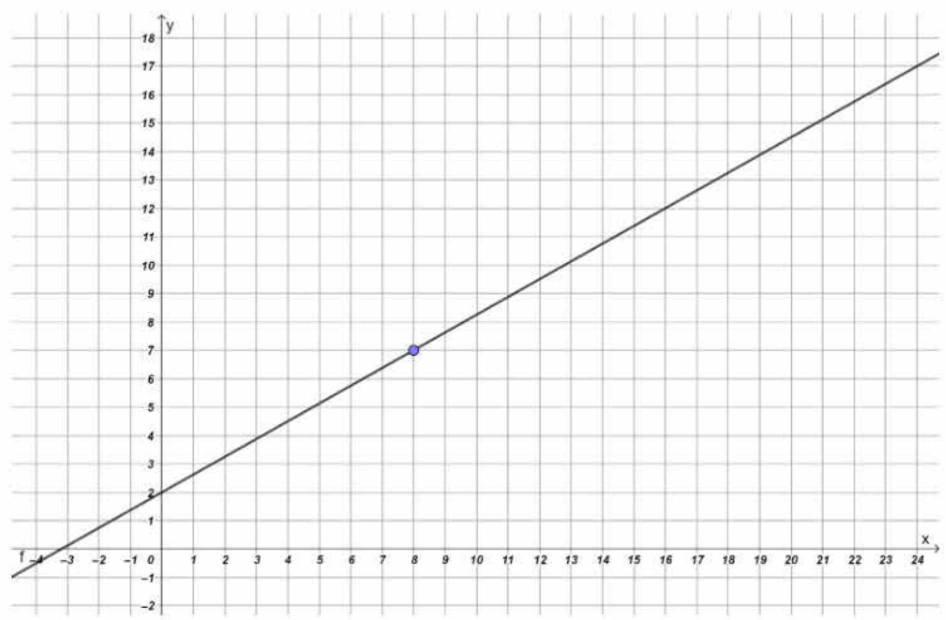
skrivsättet k=Δy/Δx för att undvika att tecknet skulle medföra svårigheter. När läraren sedan visade ett exempel på en uppgift av samma karaktär som i aktivitet 3 (liknande de i Figur 8), så hittades punkten och sedan stegades det i y-led först och sedan i x-led för att komma till nästa punkt – täljaren och nämnaren är två separata egenskaper hos k-värdet! Vi valde att stega på detta sätt (snarare än det traditionella att gå steg i x-led först) för att underlätta då vi läser k=Δy/Δx som "steg i y-led delat med steg i x-led" och där kommer "steg i y-led" först.

Under lektionens olika aktiviteter användes en dokumentkamera som var kopplad till en dator så att elevlösningar kunde projiceras på whiteboardtavlan med hjälp av en projektor. Intentionen med detta var att göra eleverna mer aktiva och ge ett mer demokratiskt klassrum där fler röster hörs än lärarens i diskussionerna som genomfördes i den stora gruppen efter varje aktivitet.

FORSKNINGSLEKTION 2

För att ytterligare belysa k-värdet som en kvot valde vi att förändra lektionen mer. En stor förändring var att vi utökade antalet deluppgifter på aktiviteten av karaktären "rita ut den linje som går genom punkten… och har lutningen…" från fyra deluppgifter till åtta deluppgifter. De deluppgifter vi lade till behandlade alla vanliga svårigheter med just lutningen som en kvot. Till exempel att ha med punkten (3,2) och k=2/3 i samma uppgift då elever kan se k=2/3 som den punkten då täljaren betydde något med y och nämnaren något med x. Ett annat exempel vi ville belysa ytterligare denna gång var k-värdet som heltal – läraren går igenom k-värdet som en kvot men hur hanterar elever problemet om k=2 eller k=-2.5 ? En annan förändring från forskningslektion 1 var att vi tog bort den första aktiviteten och istället lade till en ny aktivitet allra sist (se Figur 10). Detta då för att låta eleverna själva stöta på dessa tre vanliga fel kring k-värdet (beräknar k-värdet som Δx/Δy, ser k-värdet som skärningen med x-axeln samt ser k-värdet som y/x för en punkts koordinater) och inse att de är fel samtidigt som de får diskutera varför de är fel och hur man skall tänka istället.

Figur 10: Aktivitet 3 på forskningslektion 2



Magnus hävdar att grafen har lutningen $k = \frac{8}{5}$. Ulf håller inte med utan säger att grafen har lutningen $k = -3$. Lars säger att de båda har fel; "Lutningen är ju såklart $k = \frac{7}{8}$". Alla har tyvärr fel, hur kan de ha tänkt för att få fram sina svar? Vad är egentligen lutningen på denna linje?

EXAMINATIONER

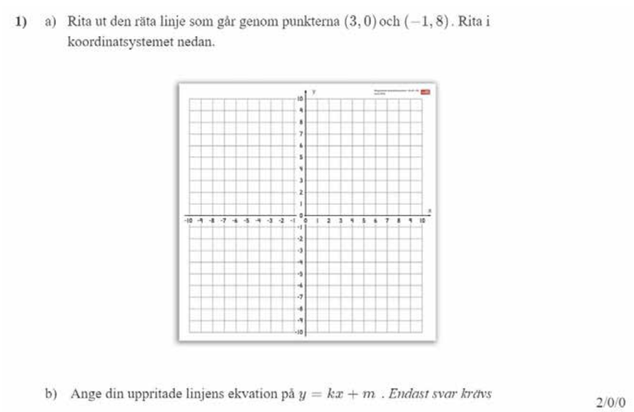
I STUDIEN GENOMFÖRDES en del tester för att kvantifiera undersökningen i syfte att kunna påvisa elevernas kunnande för de elever som ingick i forskningslektionerna i jämförelse med eleverna i kontrollgrupperna. Tre veckor efter forskningslektion 1 genomfördes ett mindre läxförhör med tre uppgifter för eleverna och i en av kontrollgrupperna (se Figur 12 för uppgift 1 i läxförhöret). Det genomfördes också ett likadant läxförhör tre veckor efter forskningslektion 2 för de elever som deltog på den lektionen samt i den andra kontrollgruppen.

Sju veckor efter forskningslektion 1 hade eleverna i studien samt kontrollgruppen ett enskilt skriftligt prov på momentet funktioner där eleverna bland annat skulle visa sina kunskaper på lutningen av en linjär funktion. I en av frågorna på detta prov (se Figur 11 för Provuppgift 1) skulle eleverna rita upp en rät linje utifrån två punkters koordinater samt bestämma linjens lutning, för att få tillfälle att visa sitt lärande kring studiens lärandeobjekt. Även för eleverna som deltog i forskningslektion 2 och dess kontrollgrupp genomfördes ett enskilt och skriftligt prov (cirka sex veckor efter forskningslektion 2). I denna examination valde vi att ha en provuppgift som liknande uppgift 1 i läxförhöret i större utsträckning för att kunna göra en mer statistisk säkerställd analys kring elevernas lärande om studiens lärandeobjekt.

På skolan arbetar vi med samplanering och sambedömning för att skapa mer likvärdighet. Provet för eleverna i forskningslektion 1 konstruerades tillsammans med andra lärare på skolan som undervisade andra grupper i samma kurs. Därmed hade vi mindre frihet i att själva styra provuppgifternas innehåll än om vi hade konstruerat provet själva.

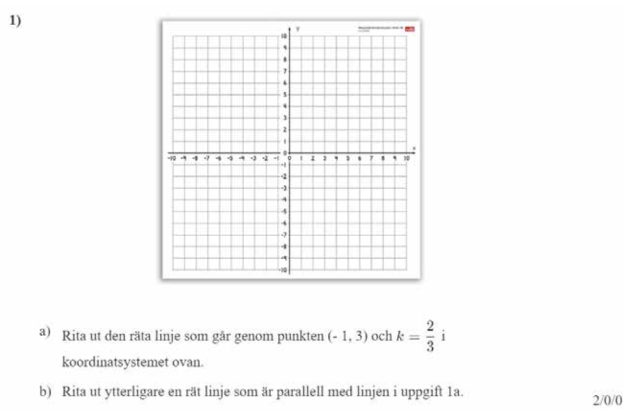
Ytterligare en uppgift på proven för de båda forskningsgrupperna var av karaktären *"Bestäm den räta linje (y=kx+m) som går genom punkterna…"* i syfte att kunna jämföra elevernas kunskaper om linjära funktioner med den analys som gjordes på liknande fråga efter nationella proven i matematik 1a och 1b våren 2022 (Axelson, Efremova, Kristiansson, 2022).

Figur 11: Provuppgift 1 för forskningslektion 1 respektive forskningslektion 2.


1) a) Rita ut den räta linje som går genom punkterna $(3, 0)$ och $(-1, 8)$. Rita i koordinatsystemet nedan.

b) Ange din uppritade linjens ekvation på $y = kx + m$. *Endast svar krävs*

2/0/0


1)

a) Rita ut den räta linje som går genom punkten (- 1, 3) och $k = \frac{2}{3}$ i koordinatsystemet ovan.

b) Rita ut ytterligare en rät linje som är parallell med linjen i uppgift 1a.

2/0/0

BEARBETNING AV INSAMLADE DATA

EFTERSOM SYFTET MED projektet var att ta reda på vad gymnasieelever i årskurs 1 har för förståelse kring begreppet lutning för en rät linje, ingick endast elever i årskurs 1 som läste kurserna matematik 1b och matematik 1c i undersökningen. Eleverna tillfrågades muntligt av oss i projektet, i god tid innan forskningslektionerna genomfördes. Eleverna valdes genom att de tillfrågades och var positiva till att delta i detta projekt. Fler elever tillfrågades från de tre klasserna (en klass på naturvetenskapsprogrammet och två klasser från ekonomiprogrammet) men några av eleverna ville inte delta av olika anledningar.

Data togs in dels med hjälp av ljudupptagning och filminspelning, dels genom elevlösningar till de olika aktiviteterna under de tre lektioner som ingick i studien. Ljudupptagningen transkriberades av oss själva.

Eleverna i studien fick ett informationsbrev där syftet med undersökningen presenterades. I detta brev stod att deras medverkan är frivillig och att de när som helst kan avbryta sin medverkan i studien. Eleverna är över 15 år så deras samtycke räckte för att uppfylla kravet för samtycke. Alla uppgifter som eleverna lämnar kommer att behandlas konfidentiellt då ingen förutom vi och handledare på STLS kommer att ha tillgång till materialet.

RESULTAT OCH DISKUSSION

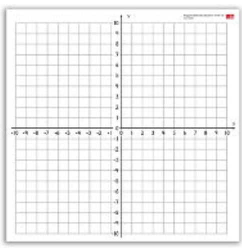
I VÅR FÖRSTA analys kan vi se att eleverna i studien från forskningslektion 1 har god förståelse för procedurförmågan, sannolikt för att forskningslektionens aktiviteter stärkte deras begreppsförståelse av lutningen som en kvot.

En aktivitet under båda forskningslektionerna var av karaktären *"rita ut den räta linje som går genom punkten… och har k-värdet…"* där såväl punkten som k-värdet varierades. En liknande fråga ställdes också på läxförhör (och på kommande prov) för att se om kunskaperna var beständiga. Resultatet från den frågan ses i Figur 12 nedan. De enkla slutsatser vi kan dra är att eleverna från forskningslektionen i större utsträckning kunde rita grafen till den linjära funktionen korrekt jämfört med kontrollgruppen på läxförhöret.

och 69% för kontrollgruppen men på provet var det 72% i forskningsgruppen och 56% i kontrollgruppen. Jämfört med resultatet i den analys som gjordes av nationella proven i matematik 1a och 1b våren 2022 (Axelson, Efremova, Kristiansson, 2022) kan en större andel av eleverna i studien beräkna lutningen korrekt. Att elevernas kunskaper var bestående över tid kan också ses på resultaten av fråga 1a från läxförhöret och provet (se Figur 13).

Ett problem vi såg var att många elever brottas med hur en punkts koordinater skrivs ut; det blandas ihop så att till exempel (3,4) tolkas ha x-koordinaten 4 och y-koordinaten 3, eller att (3,4) tolkas som punkterna på koordinataxlarna (punkterna (3,0) och (0,4)). Finns minustecken med i punktens koordinater blir det också svårare för eleverna att pricka ut punkten i ett koordinatsystem. Det hindrar eleverna från att "få rätt" på uppgifterna på aktiviteterna vilket är varför vi valt att dela upp det i diagrammen ovan (se Figur 12 och 13). På läxförhöret efter lektion 2 sågs

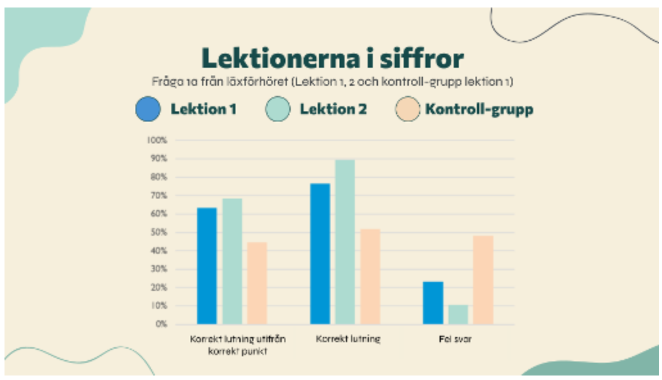
Figur 12: Fråga 1a från läxförhöret ca 3 veckor efter lektionen samt resultat.



a) Rita ut den räta linje som går genom punkten (- 4,1) och $k = \frac{3}{2}$ i koordinatsystemet ovan. Svar: (1/0/0)

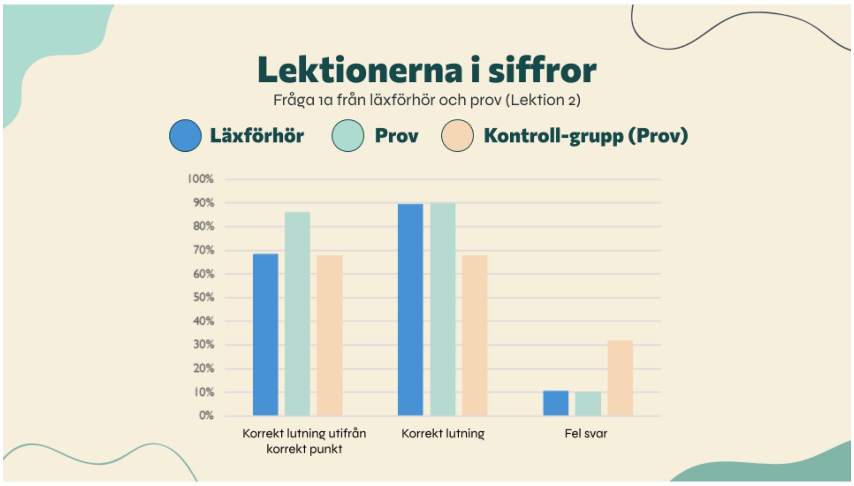
b) Ange ytterligare TVÅ punkter som ligger på den uppritade linjen.
Endast svar krävs Svar: (1/0/0)

c) Rita ut ytterligare en rät linje som är parallell med linjen i uppgift 1a. Svar: (1/0/0)



På uppgiften av karaktären *"Bestäm den räta linje (y=kx+m) som går genom punkterna…"* var lösningsfrekvensen på deluppgiften som handlade om att bestämma korrekt k-värde 72% för forskningsgruppen

Figur 13: Jämförelse av resultat från samma uppgift (se Figur 11 och 12 för uppgifterna) för elevgruppen från forskningslektion 2 vid både läxförhör och vid prov.



också att en del elever på uppgift 1 (rita den linje som går genom punkten (-4, 1) och har $k=3/2$) ritar ut punkten fel i koordinatsystemet men tolkar sedan k-värdet korrekt.

Lärandeobjektet fick större betoning i forskningslektion 2 med en utökad aktivitet 2 och tillförd aktivitet 3. Det blev också en tydligare röd tråd i forskningslektion 2 där aktiviteterna hängde mer ihop och kom i en genomtänkt ordning. Det var också bättre att tydligare gå igenom alla deluppgifter (speciellt på aktivitet 2) för att öka lärandet och vara tydligare med vad som är "rätt". Det blev också en stärkt interaktion mellan lärare/elev med frågor under genomgången och när de grupperna skulle redovisa hur de tänkt och resonerat på uppgifterna på aktivitet 2.

Vi valde att skriva "steg i x-led" och "steg i y-led" istället för Δx och Δy och det gör att det är ett mindre matematiskt tecken att förstå för eleverna. När vi stegade oss från en punkt till en annan valde vi också att gå i y-led först och sedan i x-led för att lättare koppla till att vi "läser" en kvot med "täljare delat med nämnare" och då kommer y först (se Figur 9) något som vi hoppas kan ha lett till att elever i större utsträckning ser k-värdet som "steg i y-led"/"steg i x-led" då vi läser täljaren först.

Eleverna söker kvoten på aktivitet 2 på forskningslektion 2 som stöd för att kunna rita upp den räta linjen. Ibland förstår de inte riktigt vad kvoten skall vara men de letar ändå efter en täljare och nämnare som kan hjälpa dem vidare exempel på missuppfattningar var $k=2=2/2$ alternativt $k=2=2/0$ samt $k=-2.5=(-2.5)/(-2.5)$ alternativt $k=-2.5=(-2.5)/0$.

På sista uppgiften på aktivitet 2 från forskningslektion 2 så är det också tre grupper som tänker att $k=-2.5=(-2)/5$ och även om det är fel försöker de se det som en kvot.

SLUTSATSER

GENOM ATT UTTRYCKA lutningen som en kvot (till exempel k=5/1) istället för ett tal (till exempel k=5) har vi i den här studien sett att eleverna i stor utsträckning kan hantera uppgifter som berör lutningen av linjära funktioner. Det är tydligare för eleverna att koppla ihop k=Δy/Δx till lutningen om den faktiskt är skriven som en kvot. Vad Δy respektive Δx antar för värde ger oss information om hur vi tar oss från en punkt till en annan på linjen. Skrivs k-värdet som ett tal så kan det vara svårt för eleverna att läsa av den informationen. I läromedel består ofta de inledande uppgifterna om linjära funktioner av en funktion med ett k-värde som är ett heltal. Vi tror att det är en fördel om k-värdet istället uttrycks som en kvot för att stärka kopplingen till beräkning av k-värdet och alltså öka förståelsen.

Att tillsammans få skapa en lektion som en del i en Learning Study gav mervärde till oss artikelförfattare i form av att under ett helt läsår få vrida och vända på ett lärandeobjekt i syfte att förbättra undervisningen. Det gav även ett mervärde till eleverna i form av att de fick tiden att i lugn och ro få fokusera på ett innehåll som vanligtvis är en mindre del i en större helhet.

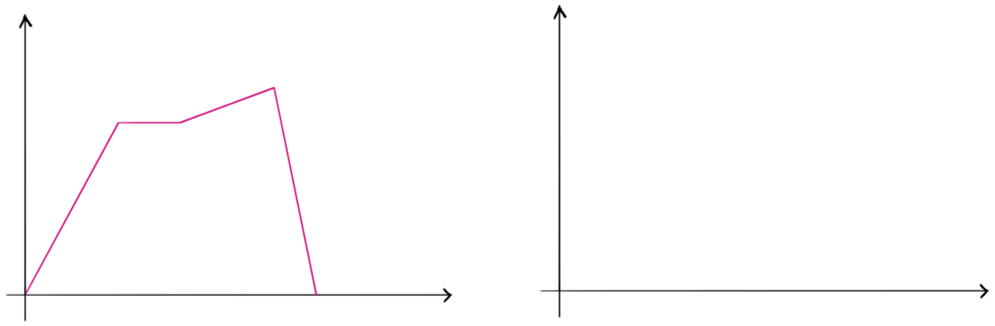
REFERENSLISTA

- Axelson, K., Efremova, A., & Kristiansson, K. (2022). *Resultat från nationella provet i matematik kurs 1a och 1b vårterminen 2022: Delrapport 2*. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-213333 [2023-10-21]
- Kristiansson, K., & Sollerman, S. (2022). *Resultat från nationella provet i matematik kurs 1a och 1b: vårterminen 2022: Delrapport 1.* http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-213332 [2023-10-21]
- Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande.* 1. uppl. Studentlitteratur
- Maunula, T., Magnusson, J. & Echevarría, C. (2011). *Learning study: undervisning gör skillnad.* 1. uppl. Studentlitteratur
- Pedagog Stockholm (2023). *Ämnesdidaktiska nätverk inom STLS.* https://pedagog.stockholm/undervisning-och-larande/forsknings-och-utvecklingsprojekt/amnesdidaktiska-natverk-inom-stls/ [2023-08-03]
- Pettersson, A. (2016). *Grafisk och algebraisk representation: Gymnasieelevers förståelse av linjära funktioner*. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kau:diva-41777 [2023-08-08]
- Skolverket (2023). *Ändrad ämnesplan i matematik*. https://www.skolverket.se/skolutveckling/inspiration-och-stod-i-arbetet/stod-i-arbetet/andrad-amnesplan-i-matematik [2023-08-07]
- Stump, S.L. (2001). *High School Precalculus Students' Understanding of Slope as Measure. School Science and Mathematics*, 101: 81–89. https://doi-org.focus.lib.kth.se/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x [2023-10-21]
- Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). *Being Sloppy about Slope: The Effect of Changing the Scale*. Educational Studies in Mathematics, 49(1), 119–140. http://www.jstor.org/stable/3483262 [2023-10-21]

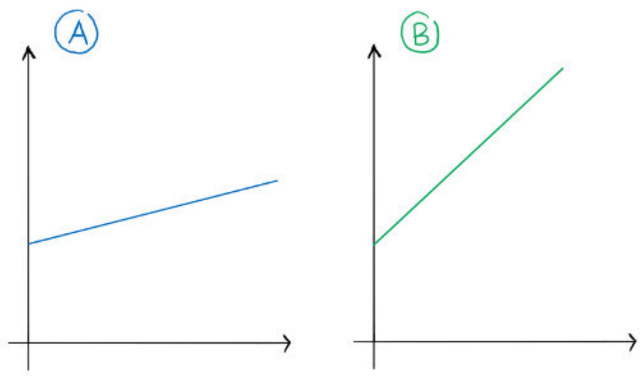
APPENDIX

BILAGA 1: AKTIVITETER UNDER FÖRSTUDIEN

Aktivitet 1 på förstudien: Arbete i par med skärm mellan elevernas pappersark. Den ena eleven fick bilden till vänster nedan och skulle förklara för den andra eleven i paret hur grafen såg ut i syfte att den eleven då skulle kunna rita av grafen på sitt papper.

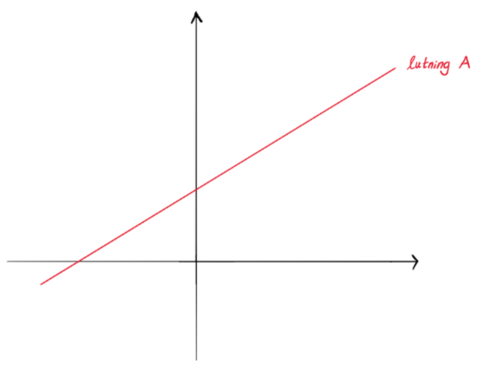


Aktivitet 2 på förstudien: Eleverna, som fortfarande arbetade i par men nu istället tillsammans, fick bilden nedan utskrivet och ombads svara på frågan (med motivering).



Linjen A lutar mer än linjen B, hur kan det stämma? *Motivera ert svar!*

Aktivitet 3 på förstudien: Eleverna fick, återigen i par, rita in fyra linjära funktioner i ett koordinatsystem med en linje redan utritad.



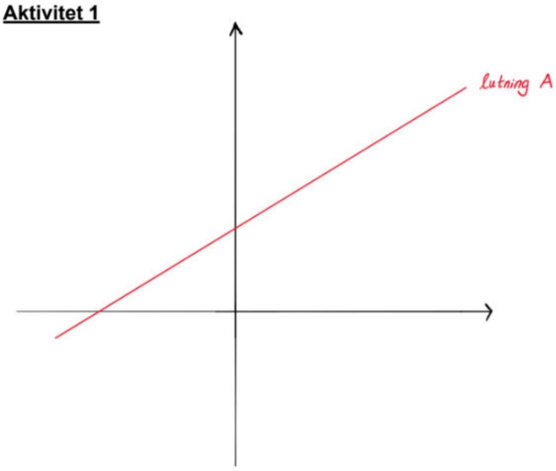
Rita in, i samma koordinatsystem, en linje med lutningen:

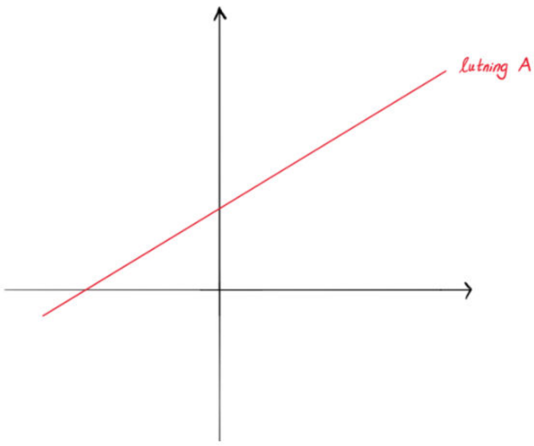
- 2A
- $\frac{1}{2}$A
- $\frac{A}{4}$
- -2A

BILAGA 2: AKTIVITETER UNDER LEKTION 1

Aktivitet 1 på forskningslektion 1: Likt aktivitet F.3 i förstudien men med några förändringar i frågeställningen till eleverna.

Aktivitet 1





Uppgift 1

a. Rita in, i samma koordinatsystem, en linje som lutar *mer* än den röda linjen.

b. Rita in, i samma koordinatsystem, en linje som lutar *mindre* än den röda linjen

Uppgift 2

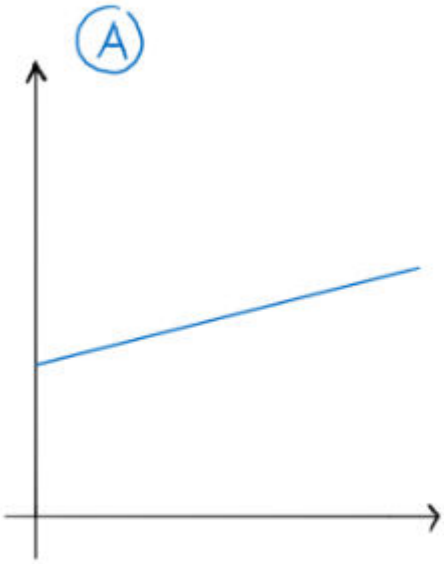
Om den röda linjen har lutningen A,

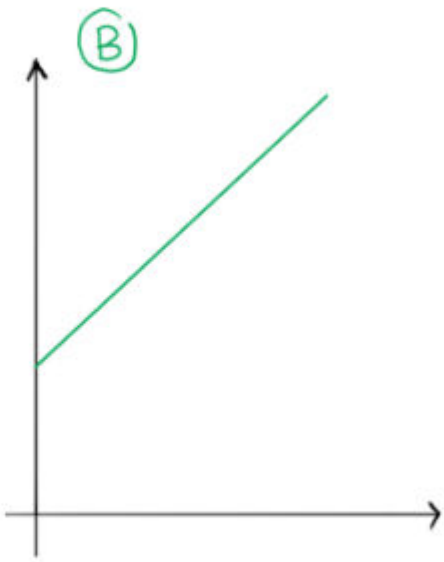
a. rita då en linje som har lutningen 2A.

b. rita då en linje som har lutningen 3A.

c. rita då en linje som har lutningen -A.

Aktivitet 2 på forskningslektion 1: Denna delades in i två delar där första delen (kallad aktivitet 2a nedan) bestod av aktivitet F.2 i förstudien - för att börja prata om visuell och analytisk lutning.





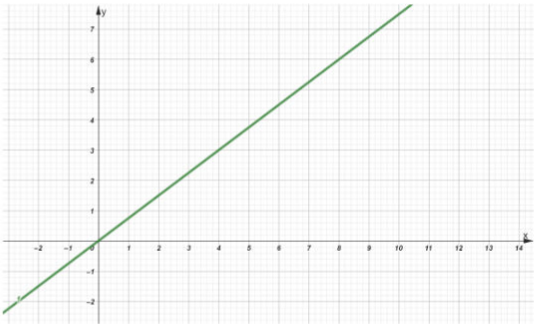
Aktivitet 2a

Linjen A lutar mer än linjen B, hur kan det stämma? *Motivera ert svar!*

Sedan följde följande aktivitet (kallad aktivitet 2b) kort därefter för att ytterligare låta eleverna uppleva skillnaden mellan visuell och analytisk lutning. Här blir resultatet att de olika graferna ser ut att luta olika mycket men har samma k- och m-värde och således sammanfaller de när de sedan ritar in de i det tomma koordinatsystemet.

Aktivitet 2b

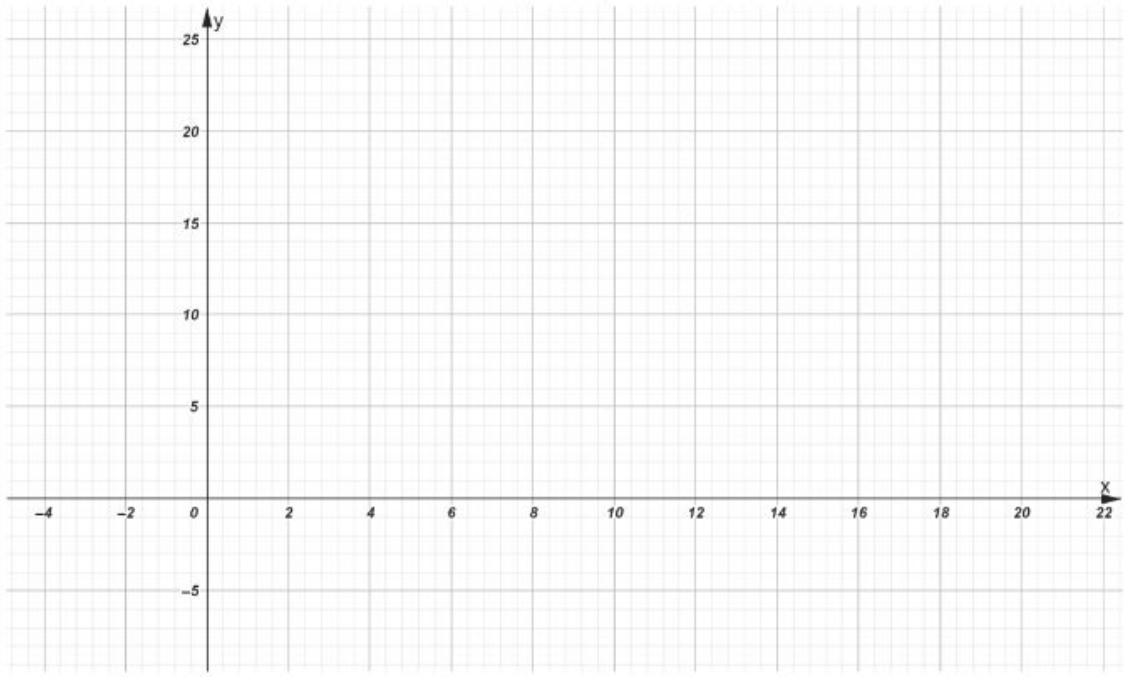
Graf 1



Graf 2

Rita in linjen från Graf 1 och linjen från Graf 2 i samma koordinatsystem.

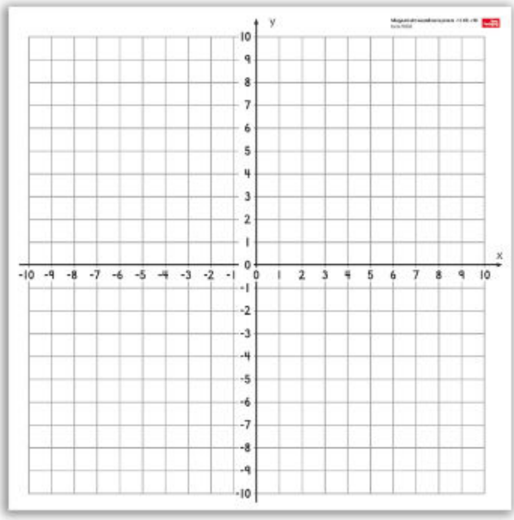
Plocka ut två punkter som ligger på linjen i Graf 1 och använd det som stöd för att rita upp linjen i Graf 1 i det nya koordinatsystemet. Gör sedan samma sak för linjen i Graf 2.



Aktivitet 3 på forskningslektion 1: Efter att ha pratat om hur vi analytiskt ser på lutning och pratat om lutning som en kvot (där täljaren och nämnaren har olika egenskaper) så fick eleverna, i par, genomföra en rad uppgifter på samma tema.

Aktivitet 3

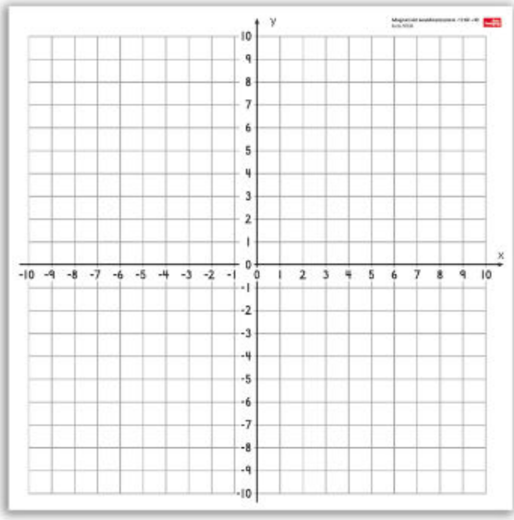
Uppgift 1



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (1,2) och $k = \frac{5}{3}$

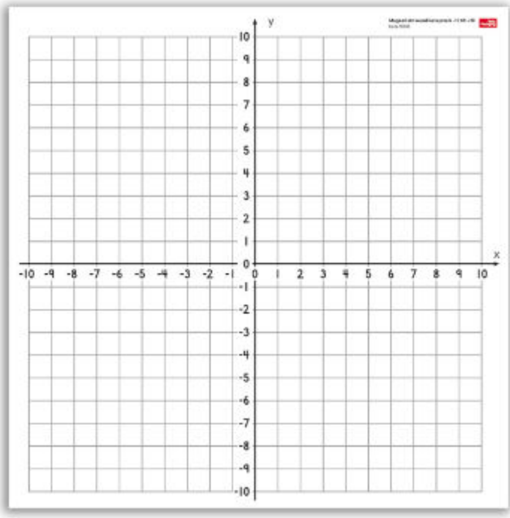
Uppgift 2



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (-3,1) och $k = \frac{1}{2}$

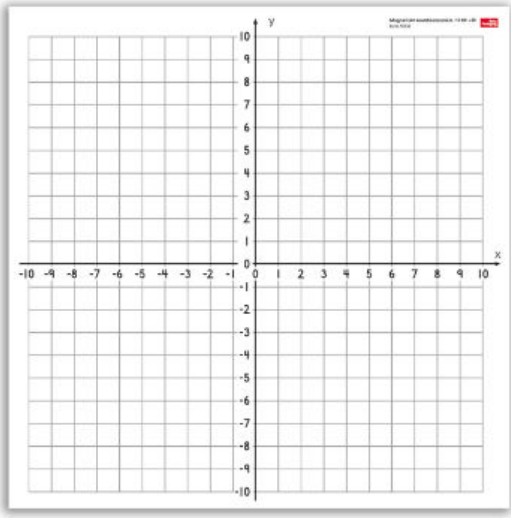
Uppgift 3



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (1,2) och $k = \frac{-2}{3}$

Uppgift 4



Rita ut den räta linje som…

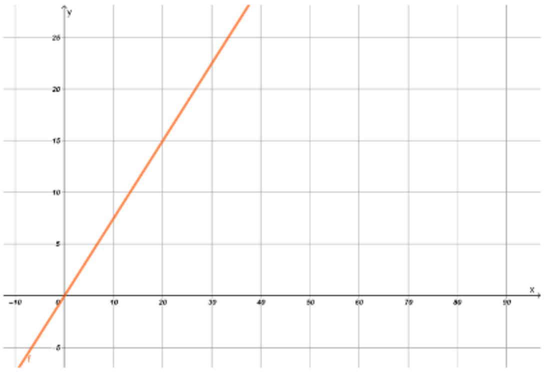
…går genom punkten (3,0) och $k = 2$

Aktivitet 1 på forskningslektion 2: Vi inledde lektionen nu istället med aktivitet 1.2a från lektion 1, denna aktivitet nu istället kallad aktivitet 1a. Graferna förtydligades (för att göra det lättare för elever att hitta punkter som sammanföll med grafen). Det lades också till en fråga efter att de först tittat på de två första graferna bara och sedan samma fråga när de ritat de båda graferna i samma koordinatsystem; *vilken graf lutar mest?*

Graf 2

Aktivitet 1a

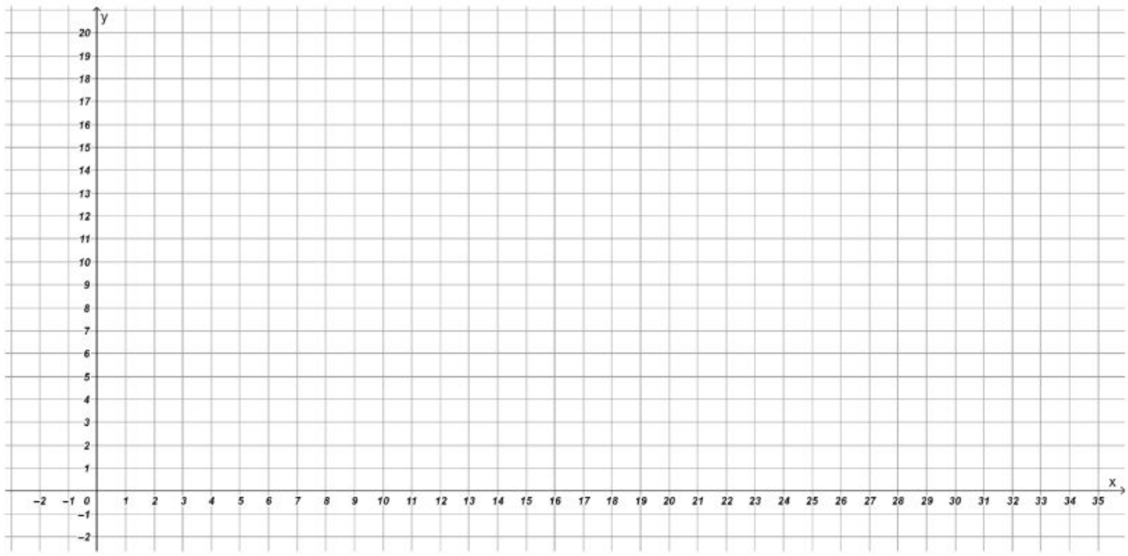
Graf 1



Vilken graf lutar mest?

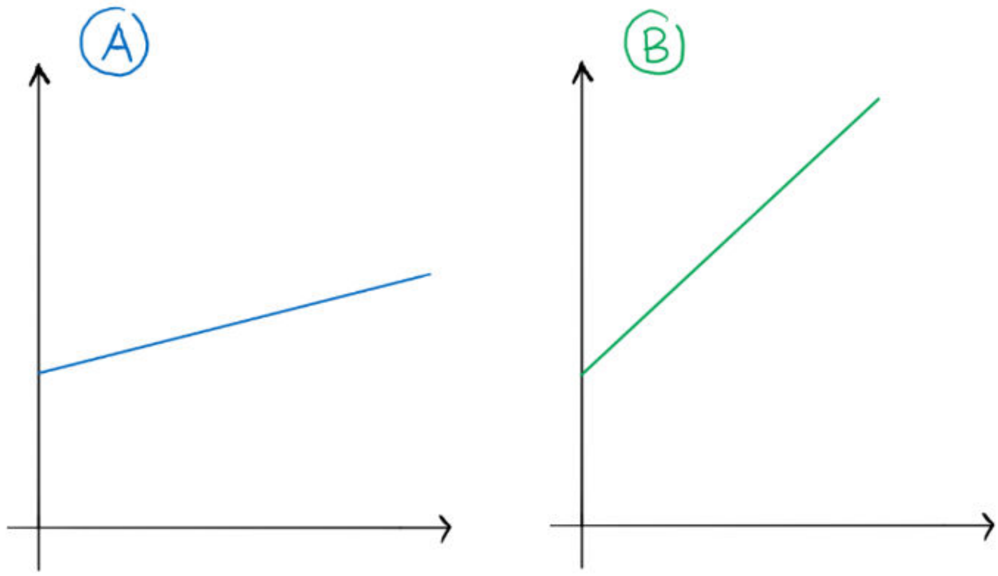
Rita in linjen från Graf 1 och linjen från Graf 2 i samma koordinatsystem.

Plocka ut två punkter som ligger på linjen i Graf 1 och använd det som stöd för att rita upp linjen i Graf 1 i det nya koordinatsystemet. Gör sedan samma sak för linjen i Graf 2.



Vilken graf lutar mest?

Efter denna fick eleverna aktivitet 1b (som var aktivitet 1.2a under lektion 1):



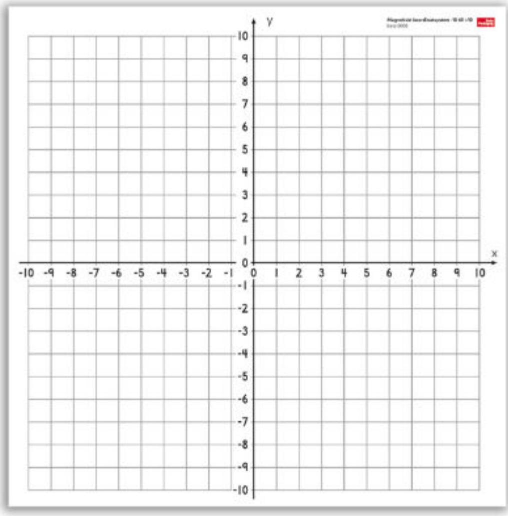
Aktivitet 1b

Linjen A lutar mer än linjen B, hur kan det stämma? *Motivera ert svar!*

Aktivitet 2 på forskningslektion 2: Efter gemensam diskussion om visuell och analytisk lutning med eleverna efter aktivitet 1 så fick eleverna genomgång om k-värdet som en kvot där täljaren och nämnaren betyder olika saker. Denna aktivitet är aktivitet 1.3 från lektion 1 med förändringarna att punkterna och kvoterna ändrades något för att få eleverna att inte kunna begå vanliga misstag men också att vi la till fler frågor av den typen.

Aktivitet 2

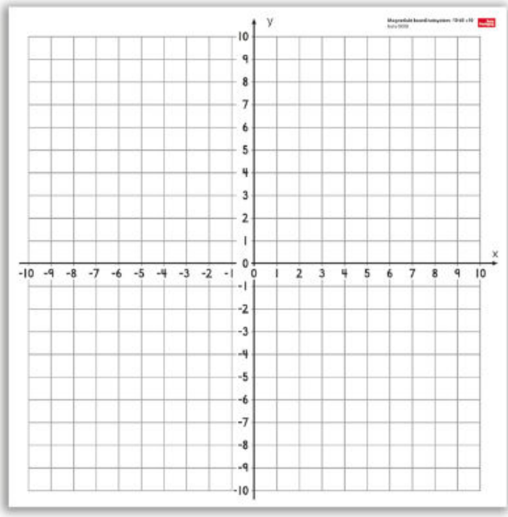
Uppgift 1



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (3,2) och $k = \frac{5}{4}$

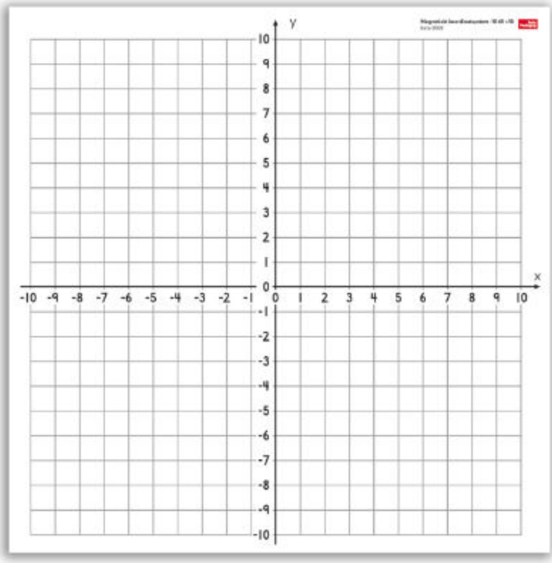
Uppgift 2



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (3,2) och $k = \frac{2}{3}$

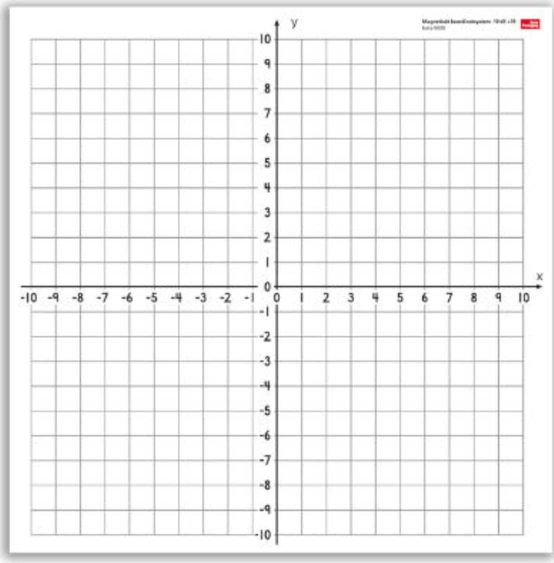
Uppgift 3



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (3,0) och $k = \frac{1}{2}$

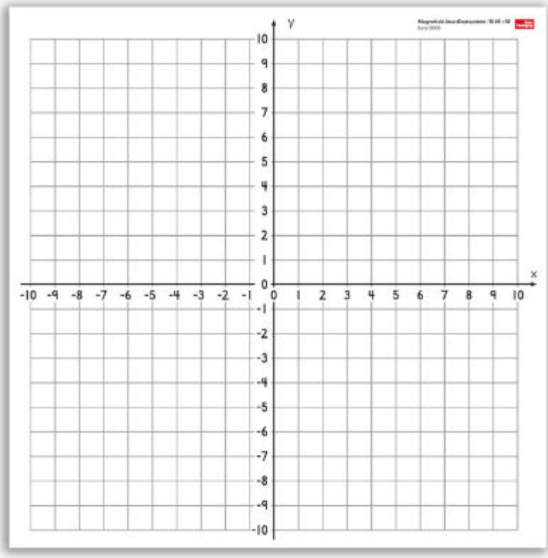
Uppgift 4



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (3,0) och $k = 2$

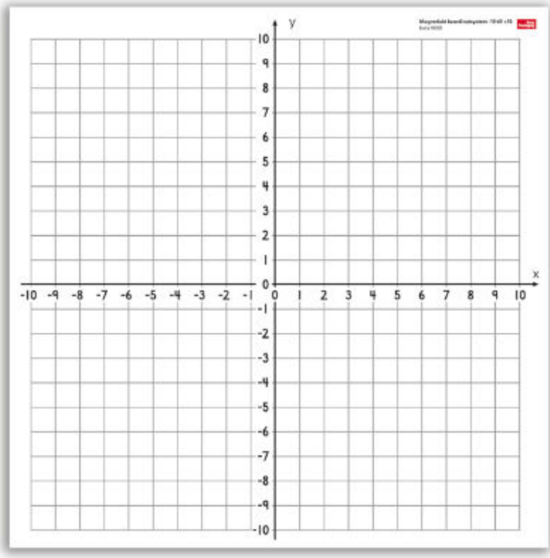
Uppgift 5



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (3,4) och $k = \frac{3}{4}$

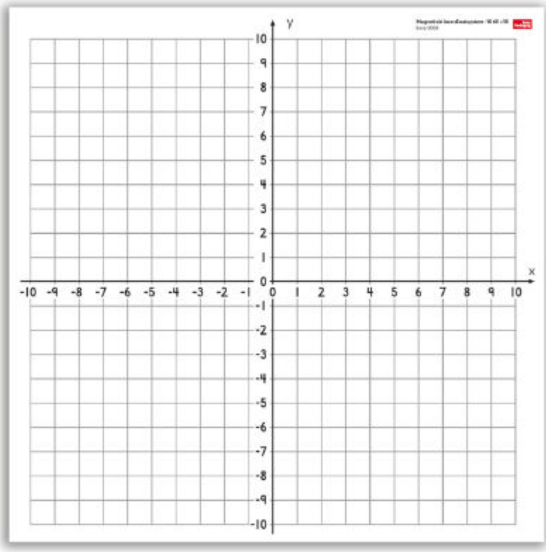
Uppgift 6



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (-1,-5) och $k = \frac{2}{-5}$

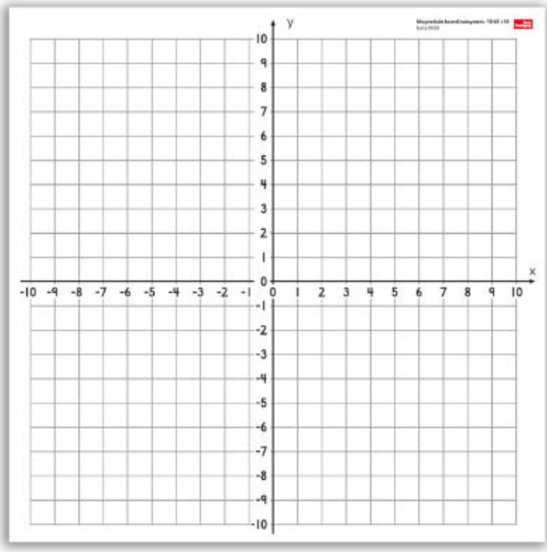
Uppgift 7



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (1,2) och $k = \frac{-2}{3}$

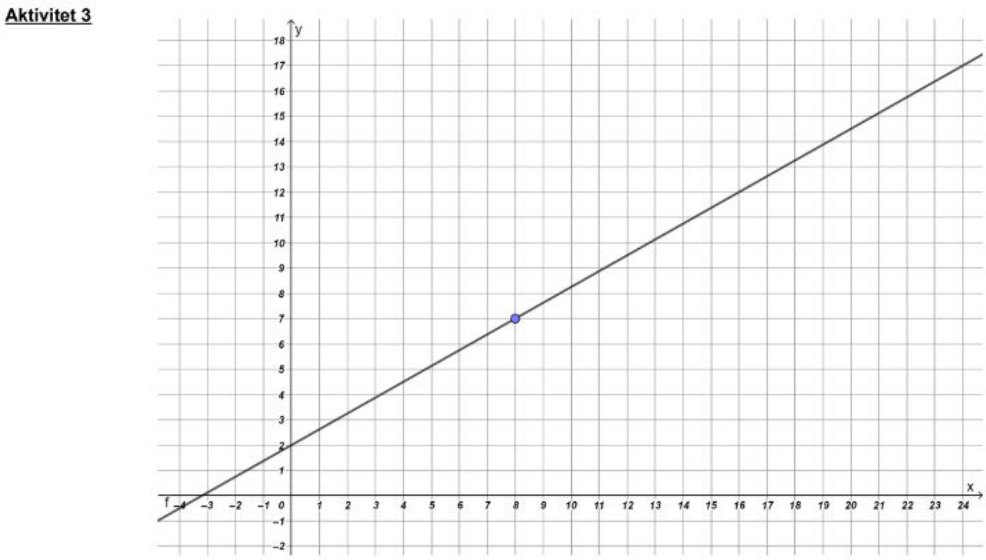
Uppgift 8



Rita ut den räta linje som…

…går genom punkten (-2,5) och $k = -2,5$

Aktivitet 3 på forskningslektion 2: För att få elever att upptäcka vanliga fel kring analytisk lutning så fick eleverna, i par, titta på grafen nedan och dels försöka hitta vad k-värdet egentligen är men också försöka förstå hur de tre personerna som beräknat värdet fel kan ha tänkt för att komma dit.



Magnus hävdar att grafen har lutningen $k = \frac{8}{5}$, Ulf håller inte med utan säger att grafen har lutningen $k =- 3$. Lars säger att de båda har fel; "Lutningen är ju såklart $k = \frac{7}{8}$". Alla har tyvärr fel, hur kan de ha tänkt för att få fram sina svar? Vad är egentligen lutningen på denna linje?

SKOLPORTEN

SKOLPORTEN